W. Wolking

DIE HAUSDORFF-DIMENSION DER

SINGULÄREN MENGE ENDLICH

ERZEUGTER KLEINSCHER GRUPPEN

Bochum 1977

DIE HAUSDORFF-DIMENSION DER SINGULÄREN MENGE ENDLICH ERZEUGTER KLEINSCHER GRUPPEN

vorgelegt von Walter Wolking

Inhalt

Einleitung

Die Beschäftigung mit Kleinsschen Gruppen, von denen die Fuchsschen Gruppen eine besondere Rolle bei der Uniformisierung Riemannscher Flächen spielen, hat zu einem selbständigen Aufgabengebiet in der Mathematik geführt, das durch neue Forschungsergebnisse ständig erweitert wird. Zu erwähnen sind in diesem Zusammenhang besonders die Arbeiten von L. Ahlfors, L. Bers, L. Greenberg, B. Maskit und A.F. Beardon. L. Ahlfors gelang es zusammen mit L. Bers, den Typ des Quotientenraumes für endlich erzeugte Gruppen näher zu bestimmen, B. Maskit fand unter den gleichen Voraussetzungen einfache hinreichende Kriterien für quasi-Fuchssche Gruppen.
Zunehmendes Interesse finden die Untersuchungen über die singuläre Menge einer Kleinschen Gruppe (die Menge aller Grenzpunkte). Hier sind besonders die Autoren A.F. Beardon und T. Akaza zu erwähnen. Charakterisiert werden diese Mengen durch ihre Hausdorff-Dimension. Beardon bestimmte für jedes t mit $0<t<1$ eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe zweiter Art, deren zugehörige Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ t nicht unterschreitet, Akaza untersuchte die singuläre Menge spezieller Schottky-Gruppen.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der singulären Menge Λ Kleinsscher Gruppen. Diese lassen sich in elementare und nicht elementare Gruppen unterteilen. Die elementaren Gruppen besitzen höchstens zwei Grenzpunkte und wurden eingehend von L. Ford * untersucht. Sie sind naturgemäß für unsere Betrachtungen uninteressant. Die nicht elementaren Gruppen haben mindestens drei Grenzpunkte. In diesem Fall enthält die singuläre Menge unendlich viele Elemente. Im folgenden ist, wenn kein ausdrücklicher Hinweis erfolgt, eine Kleinssche Gruppe immer eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe

* Siehe Literaturverzeichnis [19]

mit mindestens drei Grenzpunkten.
Die vorliegende Arbeit ist in drei Kapitel eingeteilt.

Im ersten Kapitel zeigen wir unter anderem, daß die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ der singulären Menge jeder Kleinsschen Gruppe positiv ist. Eine Erweiterung des dabei benutzten Verfahrens liefert die Ungleichungen

$d(\Lambda) > \frac{1}{2}$ bzw. $d(\Lambda) > 1$ für den Fall, daß G einfach- bzw. doppelt-periodische Untergruppen enthält.

Im zweiten Kapitel wird der oben erwähnte Existenzsatz von A.F. Beardon wesentlich verschärft.
Mit Hilfe quasikonformer Abbildungen und eines Stetigkeitsarguments gelingt der Nachweis, daß es zu jedem t mit $0 \leq t \leq 1$ eine Fuchssche Gruppe G (elementar oder nicht elementar) mit $d(\Lambda) = t$ gibt. Das dabei benutzte Verfahren kann man auf spezielle Gruppen vom Ford-Typ übertragen.
Unter Berücksichtigung eines von T. Akaza gewonnenen Ergebnisses läßt sich damit die Grenze von 1 auf $\frac{3}{2}$ erweitern, das heißt:
Zu jedem t mit $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ gibt es eine Kleinssche Gruppe G mit $d(\Lambda) = t$.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit den Grenzpunkten, die nicht auf dem Rande einer Komponente des Diskontinuitätsbereichs liegen. Es gelingt der Nachweis, daß eine Kleinssche Gruppe im allgemeinen Punkte dieser Art besitzt, daß also die residuale Grenzpunktmenge Λ_0 nicht leer ist. Die Ausnahmen sind genau die Funktionsgruppen und solche Gruppen, deren Grenzpunkte auf einer quasikonformen Kurve liegen. Weiter gelten die Ergebnisse des ersten Kapitels schon für Λ_0 , das heißt:
Ist Λ_0 nicht leer, so gilt $d(\Lambda_0) > 0$;
Enthält G eine einfach- bzw. doppelt-periodische Untergruppe, so gilt $d(\Lambda_0) > \frac{1}{2}$ bzw. $d(\Lambda_0) > 1$.

Kapitel I

1) Vorbemerkungen*

Zu jeder linearen Transformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
$ad-bc=1$; $c\neq 0$ der abgeschlossenen komplexen Zahlenebene $\hat{C}$ gehört ein isometrischer Kreis H_T, der durch $|T'(z)| = \frac{1}{|cz+d|^2} = 1$ bestimmt ist. Sein Mittelpunkt ist $T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, sein Radius $R_T = \frac{1}{|c|}$.
Der zu T^{-1} gehörende isometrische Kreis $H_{T^{-1}}$ hat den Mittelpunkt $T(\infty) = \frac{a}{c}$ und den gleichen Radius $R_{T^{-1}} = \frac{1}{|c|}$.
Sind S,T lineare Transformationen, R_S bzw. R_T die Radien der entsprechenden isometrischen Kreise und g_S bzw. g_T die zugehörigen Mittelpunkte, so gilt für die Transformation ST:

$$R_{ST} = \frac{R_S \cdot R_T}{|g_{T^{-1}} - g_S|} \qquad \text{falls } g_S \neq g_{T^{-1}} \text{ ist.}$$

Zum Beweise sei $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$; $ad-bc=1$; $c\neq 0$

$$T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \; ; \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1 \; ; \; \gamma\neq 0$$

ST entspricht dann einer Matrix $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ c\alpha+d\gamma & \cdots \end{pmatrix}$

Also gilt: $R_{ST} = \frac{1}{|c\alpha+d\gamma|}$;

Mit $R_S = \frac{1}{|c|}$, $R_T = \frac{1}{|\gamma|}$, $g_S = -\frac{d}{c}$, $g_{T^{-1}} = \frac{\alpha}{\gamma}$ folgt

$$R_{ST} = \frac{1}{|c\alpha+d\gamma|} = \frac{\frac{1}{|c|\,|\gamma|}}{\left|\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{d}{c}\right|} = \frac{R_S R_T}{|g_{T^{-1}} - g_S|} .$$

Jede Transformation T mit $T(\infty)\neq\infty$, $g_T \neq g_{T^{-1}}$, und dem zugehörigen

* Siehe [19] und [20]

isometrischen Kreis H_T (die von H_T berandete abgeschlossene endliche Kreisscheibe sei D_T) setzt sich zusammen aus einer Spiegelung an H_T, einer anschließenden Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke $g_T g_{T^{-1}}$ und eventuell (im loxodromischen Fall) einer weiteren Drehung um den Mittelpunkt $g_{T^{-1}}$. Ist $g_T = g_{T^{-1}}$, so ist T elliptisch mit der Periode 2 . Jede elliptische Transformation T mit $T(\infty) \neq \infty$ setzt sich zusammen aus einer Spiegelung an H_T und einer anschließenden Spiegelung an der Verbindungsgeraden der beiden Fixpunkte von T.

Man unterscheidet vier verschiedene Arten linearer Transformationen:

a) Ist T ($T(\infty) \neq \infty$) eine elliptische Transformation, so schneiden sich H_T und $H_{T^{-1}}$ in den beiden Fixpunkten von T oder sie sind identisch, nämlich genau dann, wenn T die Periode 2 hat.

b) Für ein parabolisches T ($T(\infty) \neq \infty$) bildet der Fixpunkt von T genau den Durchschnitt $D_T \cap D_{T^{-1}}$.

c) Ist T hyperbolisch ($T(\infty) \neq \infty$), so sind D_T und $D_{T^{-1}}$ punktfremd. Die beiden Fixpunkte p_1, p_2 liegen im Innern von $D_T \cup D_{T^{-1}}$; $p_1 \in D_T$, $p_2 \in D_{T^{-1}}$.

d) Ist schließlich T loxodromisch ($T(\infty) \neq \infty$), so sind D_T und $D_{T^{-1}}$ ebenfalls punktfremd. Die beiden Fixpunkte liegen ebenfalls im Innern von $D_T \cup D_{T^{-1}}$; $p_1 \in D_T$, $p_2 \in D_{T^{-1}}$.

In den Fällen a),b),c) setzt sich die Transformation aus zwei Spiegelungen, im Fall d) aus vier Spiegelungen zusammen.

Eine Gruppe G linearer Transformationen heißt eigentlich diskontinuierlich genau dann, wenn es einen Punkt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt und dazu eine Umgebung U_{z_0} , sodaß $T(U_{z_0}) \cap U_{z_0} = \emptyset$ für alle $T \in G$ gilt. Die Menge aller derartigen Punkte zusammen mit den elliptischen Fixpunkten von G bilden den Diskontinuitätsbereich Ω von G. Ω ist eine (im all-

gemeinen verzweigte) Überlagerungsfläche der Fläche $\Omega/_G$. Jeder Punkt in $\Lambda = \hat{C} - \Omega$ heißt Grenzpunkt von G. Enthält Λ mindestens drei Elemente, so enthält Λ unendlich viele Elemente. Die singuläre Menge Λ ist in diesem Fall perfekt und nirgendwo dicht, das heißt:
Die Menge der Häufungspunkte von Λ ist mit Λ identisch und in jeder Umgebung eines Grenzpunktes liegen Punkte aus Ω . Eine Gruppe G mit mindestens drei Grenzpunkten bezeichnen wir im folgenden als Kleinsche Gruppe.
Einige für das Folgende wichtige Eigenschaften Kleinscher Gruppen seien hier zusammengestellt.

a) Jede Kleinsche Gruppe G enthält ein hyperbolisches oder loxodromisches Element.

b) Ist p Fixpunkt eines parabolischen Elements aus G, so kann p nicht Fixpunkt eines hyperbolischen oder loxodromischen Elements aus G sein.

c) Es seien S,T zwei hyperbolische oder loxodromische Transformationen aus $G-\{1\}$. Ist ein Fixpunkt von S identisch mit einem Fixpunkt von T, so sind auch die beiden übrigen Fixpunkte von S und T identisch und es gilt dann $T=S^n$ oder $S=T^n$; $n \in Z$; (T ist eine Potenz von S oder umgekehrt).

d) In jeder Umgebung eines Grenzpunktes z von G liegt ein Fixpunkt eines hyperbolischen oder loxodromischen Elements von G.

Zur Charakterisierung der Menge Λ benutzen wir die Hausdorff-Dimension.

Ist E eine beliebige Punktmenge der endlichen komplexen Zahlenebene und C_δ ein abzählbares System E überdeckender abgeschlossener Kreisscheiben D_i mit einem Durchmesser $d_i \leq \delta$ (i=1,2,...) derart, daß jeder Punkt aus E im Innern einer derartigen Kreisscheibe liegt, so heißt

$$M_t(E) = \lim_{\delta \to 0} \left[\inf_{C_\delta} \sum_{D_i \in C_\delta} d_i^t \right] \qquad t \geq 0$$

das t-dimensionale Hausdorff-Maß der Menge E.

Ist $M_{t_1}(E) = 0$, so ist auch $M_{t_2}(E) = 0$ für $t_2 > t_1$,
denn für $\delta < 1$, $U_i \in C_\delta$ folgt $d_i^{t_1} > d_i^{t_2}$ und daraus sofort $M_{t_2}(E) = 0$.

Ist hingegen $M_{t_1}(E)$ positiv oder ∞ , so ist $M_{t_2}(E)$ unendlich für $t_2 < t_1$.

Für den Fall $M_{t_1}(E) = \infty$ ist dies unmittelbar klar,
denn für $\delta < 1$, $U_i \in C_\delta$ folgt $d_i^{t_1} < d_i^{t_2}$ und damit $M_{t_2}(E) = \infty$.

Ist dagegen $M_{t_1}(E)$ endlich positiv, $M_{t_1}(E) = a$, $a > 0$,
so gilt für $\delta_n \leq \frac{1}{n}$, $n \in N$, $U_i \in C_{\delta_n}$

$$d_i^{t_2} = \frac{d_i^{t_1}}{d_i^{t_1 - t_2}} > n^{t_1 - t_2} d_i^{t_1} \quad , \text{ also}$$

$$\sum_{U_i \in C_{\delta_n}} d_i^{t_2} > n^{t_1 - t_2} \sum_{U_i \in C_{\delta_n}} d_i^{t_1} \geq n^{t_1 - t_2} \inf_{C_{\delta_n}} \left[\sum_{U_i \in C_{\delta_n}} d_i^{t_1} \right] \geqq n^{t_1 - t_2}(a - \varepsilon)$$

für hinreichend großes n zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$.
Mit $n \longrightarrow \infty$ folgt $\delta_n \longrightarrow 0$ und damit $M_{t_2}(E) = \infty$.
Es gibt demnach eine bestimmte Zahl t_o ($t_o \geq 0$) derart, daß $M_t(E)=0$ für alle $t > t_o$ und $M_t(E) = \infty$ für alle t mit $0 \leq t < t_o$ gilt. Diese Zahl t_o heißt die Hausdorff-Dimension d(E) der Menge E. Über das Hausdorff-Maß $M_{d(E)}(E)$ hingegen ist nichts ausgesagt.

2.) Gruppen vom Ford-Typ

Um nähere Aussagen über die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ beliebiger Kleinscher Gruppen machen zu können, untersuchen wir zunächst spezielle Gruppen und zeigen weiter, daß jede Kleinsche Gruppe eine derartige spezielle Gruppe als Untergruppe enthält.

Definition I 1

Eine Kleinsche Gruppe G heißt eine Gruppe vom Ford-Typ genau dann, wenn G von endlich vielen Elementen $T_1,\dots,T_n$ $T_i(\infty) \neq \infty$; $T_i \in G$ für $i=1,2,\dots,n$; mit den folgenden Eigenschaften erzeugt wird:

a) Sind T_{i_1}, T_{i_2} ; $i_1, i_2 \in \{1,2,\dots,n\}$; hyperbolische oder loxodromische Elemente, so sind die zu den isometrischen Kreisen von $T_{i_1}, T_{i_1}^{-1}, T_{i_2}, T_{i_2}^{-1}$ gehörenden abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{T_{i_1}}, D_{T_{i_1}^{-1}}, D_{T_{i_2}}, D_{T_{i_2}^{-1}}$ paarweise punktfremd.

b) Ist T_i, $i \in \{1,\dots,n\}$ elliptisch, so hat T_i die Periode 2. (Der isometrische Kreis von T_i ist identisch mit dem von T_i^{-1})
Es gilt $D_{T_i} \cap \bigcup_{j \neq i}(D_{T_j} \cup D_{T_j^{-1}}) = \emptyset$

c) Ist schließlich T_i; $i \in \{1,\dots,n\}$ parabolisch mit dem Fixpunkt p_i, so gilt $D_{T_i} \cap D_{T_j} \neq \emptyset$ genau dann, wenn T_j parabolisch ist und den Fixpunkt p_i hat.
Ist T_j $(j \neq i)$ parabolisch mit dem Fixpunkt p_i, so verläuft die Gerade durch die Mittelpunkte der isometrischen Kreise $H_{T_i}, H_{T_i^{-1}}$ senkrecht zu der durch die Mittelpunkte von $H_{T_j}, H_{T_j^{-1}}$ bestimmten Geraden.

Da G eigentlich diskontinuierlich ist, können sich in einem zum Erzeugendensystem $T_1,\dots,T_n$ gehörenden parabolischen Fixpunkt p höchstens vier isometrische Kreise aus $\{H_{T_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}\} \cup \{H_{T_i^{-1}} \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$ treffen,
das heißt: G enthält höchstens doppelt-periodische Untergruppen.
Es ist klar, daß sich auf Grund der vorangegangenen Beschreibung sehr leicht Gruppen vom Ford-Typ konstruieren lassen.
Sind $T_1, T_2, \dots, T_n$ die in der Definition I 1 erwähnten Erzeugenden einer Gruppe G vom Ford-Typ, so ist
$\bigcap_{i=1}^{n} C(D_{T_i} \cup D_{T_i^{-1}}) = F$ ein Fundamentalgebiet*, das von endlich vielen Kreisen oder Kreisbögen berandet wird.

* Hier wird der zweite Teil der Bedingung c) berücksichtigt

($C(D_{T_i}\cup D_{T_i^{-1}})$-Komplement von $D_{T_i}\cup D_{T_i^{-1}}$ zur abgeschlossenen Zahlenebene $\hat{C}$) Der zu einem Element T aus G gehörende isometrische Kreis liegt dann in der Vereinigungsmenge $\bigcup_{i=1}^{n}(D_{T_i}\cup D_{T_i^{-1}})$, denn nach L. Ford* bildet $C\bigcup_{T\in G-\{I\}} D_T$ ein Fundamentalgebiet von G. Würde also ein isometrischer Kreis von G F treffen, so gäbe es in F zwei unter G äquivalente Punkte, was nicht sein kann.

Wir beweisen zunächst das für die weiteren Untersuchungen wichtige

<u>Lemma I 1</u>

Es sei G eine Kleinsche Gruppe derart, daß ∞ im Diskontinuitätsbereich Ω von G liegt und nicht Fixpunkt eines Elements aus G-$\{I\}$ ist. Sind dann U_1, U_2 zwei punktfremde Umgebungen zweier Grenzpunkte z_1, z_2 von G ($z_1\in U_1$, $z_2\in U_2$), so gibt es eine Transformation T, $T\in G$, mit der Eigenschaft, daß die isometrischen Kreise H_T und $H_{T^{-1}}$ in U_1 bzw. U_2 liegen. ($H_T\subset U_1$, $H_{T^{-1}}\subset U_2$)

<u>Beweis:</u> G enthält mindestens ein hyperbolisches oder loxodromisches Element und in jeder Umgebung eines Grenzpunktes z von G liegen hyperbolische oder loxodromische Fixpunkte von Transformationen aus G.*1

Es sei $p_1\in U_1$ Fixpunkt eines hyperbolischen oder loxodromischen Elements $T_1\in G$ und $q_1\in U_2$ Fixpunkt eines hyperbolischen oder loxodromischen Elements $T_2\in G$.

Da die Fixpunkte von T_1 bzw. T_2 im Innern der zugehörigen abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{T_1}, D_{T_1^{-1}}$ bzw. $D_{T_2}, D_{T_2^{-1}}$ liegen und für jede unendliche Folge paarweise verschiedener isometrischer Kreise die Folge der zugehörigen Radien gegen 0 konvergiert,*2 kann man durch eventuelle Bildung von Potenzen $T_1^{n_1}$ bzw. $T_2^{n_2}$ T_1 bzw. T_2 von vornherein so wählen, daß D_{T_1} oder $D_{T_1^{-1}}$ bzw. D_{T_2} oder $D_{T_2^{-1}}$ in U_1 bzw. U_2 liegt. Wir dürfen also voraussetzen, daß D_{T_1} ($p_1\in D_{T_1}$) bzw. D_{T_2} ($q_1\in D_{T_2}$) in U_1 bzw. U_2 liegt. Sind p_1, p_2 die Fixpunkte von T_1 und q_1, q_2 die Fixpunkte von T_2, so können wegen $p_1\neq q_1$ die Punkte p_2 und q_2

*1 Siehe [20] S. 94 ff

*2 Siehe [19]

nicht zusammenfallen. Durch eventuelles Potenzieren kann man also erreichen, daß $D_{T_1^{-1}}$ und $D_{T_2^{-1}}$ punktfremd sind. Der isometrische Kreis der Transformation $T_2^{-1}T_1$ liegt dann in D_{T_1}, da für alle Punkte außerhalb von D_{T_1} der Betrag der Ableitung von $T_2^{-1}T_1$ kleiner als 1 wird. Ebenso schließt man, daß der isometrische Kreis von $T_1^{-1}T_2=(T_2^{-1}T_1)^{-1}$ in D_{T_2} liegt. Die Transformation $T_2^{-1}T_1$ erfüllt also die geforderten Bedingungen.

q.e.d.

Mit Hilfe von Lemma I 1 läßt sich nun unschwer folgender Satz beweisen.

Satz I 1

Ist G eine Kleinsche Gruppe (Diskontinuitätsbereich Ω), n eine natürliche Zahl, so enthält G eine Untergruppe U vom Ford-Typ, die folgenden Bedingungen genügt:
a) U besitzt ein Erzeugendensystem mit genau n Elementen, das die in der Definition I 1 aufgeführten Eigenschaften hat.
b) Enthält G eine einfach periodische Untergruppe, so enthält das unter a) aufgeführte Erzeugendensystem ein parabolisches Element $T \in G-\{1\}$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $\infty \in \Omega$ und $T(\infty) \neq \infty$ für alle $T \in G-\{1\}$ gilt. Man wähle dann zu zwei Grenzpunkten z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ zwei punktfremde Umgebungen U_1, U_2 $(z_1 \in U_1;\ z_2 \in U_2)$ derart, daß im Äußeren von $U_1 \cup U_2$ unendlich viele Grenzpunkte liegen. Nach Lemma I 1 gibt es eine Transformation T_1 mit der Eigenschaft, daß die zu den isometrischen Kreisen gehörenden abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{T_1}, D_{T_1^{-1}}, D_{T_1} \cap D_{T_1^{-1}} = \emptyset$; in $U_1 \cup U_2$ liegen $(D_{T_1} \subset U_1,\ D_{T_1^{-1}} \subset U_2)$. Außerhalb von $U_1 \cup U_2$ wähle man wiederum zwei Grenzpunkte und dazu punktfremde Umgebungen U_1', U_2' mit $U_i' \cap (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ $(i=1,2)$ so klein, daß außerhalb von $U_1 \cup U_2 \cup U_1' \cup U_2'$ unendlich viele Grenzpunkte liegen. Wiederum kann man nach Lemma I 1 eine entsprechende Transformation T_2, $T_2 \in G$, finden. Dieses Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen. Man kann somit zu jeder natür-

lichen Zahl n ein System $T_1, .., T_n$ von Transformationen aus G finden, das eine Gruppe vom Ford-Typ erzeugt und die in der Definition I 1 aufgeführten Eigenschaften besitzt.
Enthält G ein parabolisches Element T_o, so kann man T_o so bestimmen, daß außerhalb von $D_{T_0} \cup D_{T_0^{-1}}$ unendlich viele Grenzpunkte liegen. Durch das oben beschriebene Verfahren gewinnt man dann eine entsprechende Gruppe U, $U \subset G$, vom Ford-Typ deren Erzeugendensystem ein parabolisches Element enthält.

Erfüllt ∞ die obigen Voraussetzungen nicht, so betrachte man eine zu G konjugierte Gruppe AGA^{-1} (A-geeignete Transformation), die die Voraussetzungen von Lemma I 1 erfüllt. Man erkennt dann sofort, daß es zu zwei vorgegebenen endlichen Umgebungen U_1, U_2 zweier endlicher Grenzpunkte z_1, z_2 von G mit $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$ eine hyperbolische oder loxodromische Transformation T, $T \in G$, mit den Fixpunkten p_1, p_2 gibt derart, daß $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ gilt. Hieraus kann man ebenso wie im ersten Teil des Beweises unschwer folgern, daß die Behauptungen des Satzes auch in diesem Fall zutreffen.

Bemerkung: Da die isometrischen Kreise zweier parabolischer Transformationen, die eine doppelt periodische Untergruppe erzeugen, nicht notwendig zueinander orthogonal sind, kann man im allgemeinen keine Untergruppe U vom Ford-Typ finden, deren Erzeugendensystem zwei parabolische Transformationen mit den in Definition I 1 c) aufgeführten Eigenschaften hat. Für die weiteren Untersuchungen ist dies jedoch ohne Bedeutung.

3) Die Hausdorff-Dimension d(Λ) für Gruppen vom Ford-Typ ohne periodische Untergruppen

Im folgenden benutzen wir im wesentlichen das von T. Akaza für Gruppen ohne periodische Untergruppen entwickelte Beweisverfahren. Durch eine Erweiterung dieses Verfahrens in 4) auf Gruppen mit einfach- bzw. doppelt-periodischen Untergruppen gelangen wir dann zu den anfangs erwähnten Aussagen über d(Λ).
Es sei also G eine Gruppe vom Ford-Typ ohne periodische

Untergruppen und $T_1,\dots,T_n$ ein Erzeugendensystem mit den in Definition I 1 angegebenen Eigenschaften.
Ferner sei $M = \{T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}\}$
Wir betrachten nun zunächst alle Elemente $S_{i_2} S_{i_1} \in G$ mit $S_{i_2}, S_{i_1} \in M$; $S_{i_2} \neq S_{i_1}^{-1}$; die wir allgemein mit $S_{(2)}$ bezeichnen. Für alle Elemente $S_{(2)} = S_{i_2} S_{i_1}$ liegt der zugehörige isometrische Kreis $H_{S_{(2)}}$ kompakt im Innern der Kreisscheibe $D_{S_{i_1}}$ ($H_{S_{(2)}} \subset D_{S_{i_1}}$), denn für alle z auf $H_{S_{i_1}}$ oder im Äußeren von $D_{S_{i_1}}$ gilt $|S'_{(2)}(z)| < 1$, was sich unmittelbar aus der Darstellung von $S_{(2)}$ durch Spiegelungen an Kreisen und Geraden ergibt.
Bezeichnen wir nun allgemein ein Element $S_{i_n} S_{i_{n-1}} \dots S_{i_2} S_{i_1}$ $S_{i_\nu} \neq S_{i_{\nu+1}}^{-1}$, $S_{i_\nu} \in M$, $\nu = 1,2,\dots,n$ mit $S_{(n)}$, so liegt aus eben denselben Gründen $H_{S_{(n)}}$ kompakt im Innern von $D_{S_{i_1}}$.
Nach Obigem gilt für die durch den isometrischen Kreis $H_{(S_{i_2} S_{i_1})^{-1}}$ bestimmte Kreisscheibe $D_{(S_{i_2} S_{i_1})^{-1}}$
$D_{(S_{i_2} S_{i_1})^{-1}} = D_{S_{i_1}^{-1} S_{i_2}^{-1}} \subset D_{S_{i_2}^{-1}}$. Wegen $S_{i_3} \neq S_{i_2}^{-1}$ liegt demnach $H_{S_{(n)}}$ im Innern von $D_{S_{i_2} S_{i_1}}$. Ist N die Anzahl der durch die Elemente von M bestimmten isometrischen Kreise, so bildet jedes Element $S_{(n)} \in G$ die N Kreise H_S, $S \in M$, auf N Bildkreise ab. Eine der durch die Bildkreise berandeten endlichen abgeschlossenen Kreisscheiben enthält in seinem Innern die übrigen N-1 Bildkreise. Gilt für $S_{(n)}$ die Darstellung $S_{(n)} = S_{i_n} \dots S_{i_1}$, so ist der entsprechende äußere Bildkreis das Bild des Kreises $H_{S_{i_1}}$, da $H_{S_{(n)}} \subset D_{S_{i_1}}$ gilt.
Diesen äußeren Bildkreis bezeichnen wir als Bildkreis vom Grade n. Die von ihm umfaßten N-1 Bildkreise sind dann vom Grade n+1, denn jeder derartige Bildkreis $S_{(n)}(H_{S_{i_0}^{-1}})$, $S_{i_0}^{-1} \neq S_{i_1}$ ist das Bild $S_{(n+1)}(H_{S_{i_0}})$ mit
$S_{(n+1)} = S_{i_n} \dots S_{i_1} S_{i_0} = S_{(n)} S_{i_0}$
Die Ausgangskreise H_S; $S \in M$; sind dann vom Grade 1 .
Man sieht unmittelbar, daß der Gesamtheit aller Bildkreise vom Grade n die Gesamtheit aller Transformationen $S_{(n)}$

entspricht, wobei verschiedenen Bildkreisen verschiedene Transformationen zugeordnet werden können. Den Ausgangskreisen H_S, $S \in M$, entsprechen die Elemente aus M.
Ist R_S, $S \in G$, allgemein der Radius des isometrischen Kreises H_S und $r_{(n)}$ allgemein der Radius eines Bildkreises vom Grade n (die von einem Bildkreis vom Grade n berandete abgeschlossene endliche Kreisscheibe bezeichnen wir allgemein als Kreisscheibe $D_{(n)}$ vom Grade n), dem eineindeutig ein $S_{(n)} \in G$ zugeordnet werden kann, so kann man nur von G abhängige Konstante $k_o(G)$, $K_o(G)$ finden derart, daß

(1) $\quad k_o(G)R^2_{S_{(n)}} \leq r_{(n)} \leq K_o(G)R^2_{S_{(n)}}$ gilt, denn

jeder isometrische Kreis $H_{S_{(n)}}$ liegt im Innern einer der endlich vielen Kreisscheiben $D_{S_{(2)}}$ falls $n > 2$ ist.
Es gibt somit eine positive Zahl m derart, daß die Abstände der Ausgangskreise H_S, $S \in M$, zu den Kreisen $H_{S_{(n)}}$ größer als m sind für alle $S \in M$ und alle $S_{(n)}$ mit $n > 2$.
Ist $\quad l^{(\mu)}_n = \sum r^{\frac{\mu}{2}}_{(n)}$, wobei über die Radien aller Bildkreise vom Grade n summiert wird, so folgt aus (1) und den obigen Ausführungen

<u>Satz I 2</u>
Es gibt positive Konstante $k_o(\mu, G)$, $K_o(\mu, G)$, die nur von μ ($\mu > 0$) und G abhängen, so daß

$$k_o(\mu,G)\sum_{V\in G-\{I\}} R^{\mu}_V \leq \sum_{n=1}^{\infty} l^{(\mu)}_n \leq K_o(\mu,G)\sum_{V\in G-\{I\}} R^{\mu}_V$$

gilt (I-identische Abbildung).

Um $r_{(n)}$ mit $r_{(n+1)}$ vergleichen zu können, beachten wir, daß durch $S_{(n)} = S_{i_n} \ldots S_{i_1}$ der Kreis $H_{S_{i_1}}$ auf einen Bildkreis vom Grade n und ein Kreis $H_{S_{i_2}}$, $H_{S_{i_2}} \neq H_{S_{i_1}}$ ($S_{i_\nu} \in M$, $\nu = 1,..,n$), auf einen solchen vom Grade n+1 abgebildet werden.
Die Lage von $H_{S_{i_1}}, H_{S_{i_2}}, H_{S_{(n)}}$ zueinander zeigt die nachfolgende Skizze.

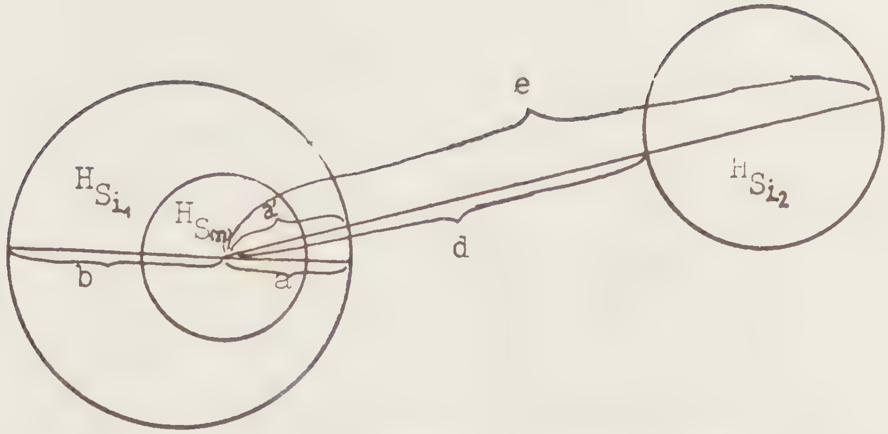


Bild 1

Durch Spiegelung an $H_{S(n)}$ wird $H_{S_{i_1}}$ auf einen Kreis mit dem Durchmesser $2r_{(n)} = \frac{R^2_{S(n)}}{a} + \frac{R^2_{S(n)}}{b} = R^2_{S(n)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq R^2_{S(n)}\frac{1}{a}$

abgebildet, $H_{S_{i_2}}$ dagegen auf einen Kreis mit dem Durchmesser

$$2r_{(n+1)} = R^2_{S(n)}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{e}\right) \leq R^2_{S(n)}\frac{1}{d}$$

Weiter gilt: $d \geq a' + \Delta \geq a + \Delta$, wobei Δ das Minimum der Abstände je zweier verschiedener Ausgangskreise H_S, $S \in M$, bedeutet.

Es folgt:

$$2r_{(n+1)} \leq R^2_{S(n)}\frac{1}{a+\Delta}, \text{ also } \frac{r_{(n+1)}}{r_{(n)}} \leq \frac{a}{a+\Delta} \leq \frac{B_0}{B_0+\Delta} < 1$$

mit $B_0 = \max\{R_S \mid S \in M\}$, da $\frac{a}{a+\Delta}$ als Funktion von a monoton steigend ist.

Nach Obigem kann a eine positive Zahl m nicht unterschreiten.

Weiter gilt:

$$2r_{(n)} \leq R^2_{S(n)}\frac{2}{a} \leq R^2_{S(n)}\frac{2}{m}$$

$$2r_{(n+1)} \geq R^2_{S(n)}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+2b_0}\right) \geq R^2_{S(n)}\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_0+2b_0}\right)$$

mit $b_o = \min\{R_S \mid S \in M\}$; $d_o = 2B_o + \Delta^*$ $(\Delta^* > 0)$

Δ^* hinreichend groß

Folglich existieren positive Konstante c_o, C_o, die nur von G abhängen mit

$$c_o \leq \frac{r_{(n+1)}}{r_{(n)}} \leq C_o;\ C_o = \frac{B_o}{B_o + \Delta}\ ;\ c_o = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{d_o} - \frac{1}{d_o + 2b_o}\right)\ ;\ (C_o < 1)$$

Wir formulieren diesen Sachverhalt als Satz.

Satz I 3

Ist $r_{(n+1)}$ der Radius einer Kreisscheibe $D_{(n+1)}$ vom Grade n+1 und $r_{(n)}$ der Radius einer Kreisscheibe $D_{(n)}$ vom Grade n mit $D_{(n+1)} \subset D_{(n)}$, so gilt:

$$c_o r_{(n)} \leq r_{(n+1)} \leq C_o r_{(n)}$$

mit positiven nur von G abhängigen Konstanten c_o, C_o $(C_o < 1)$.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Radien der Bildkreise mit wachsendem n gegen 0 streben.

Nach den obigen Ausführungen erkennt man sofort, daß es zu jedem Element z aus der Grenzpunktmenge Λ eine von z abhängige Folge $D_{(1)_z}, D_{(2)_z}, \ldots, D_{(n)_z}, \ldots$ gibt mit $\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{(n)_z}$.

Bezeichnet F_{n_0} das System aller abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{(n)}$ mit $n \geq n_o$ $F_{n_0} = \{D_{(n)} \mid n \geq n_o\}$, so ist offensichtlich F_{n_0} eine Überdeckung von Λ und der Durchmesser jeder Kreisscheibe $D_{(n)}$ ist nach Satz I 3 kleiner als eine vorgegebene Zahl δ $(\delta > 0)$, sofern man n_o hinreichend groß wählt.

Ist nun $C(\delta, \Lambda)$ ein System abzählbar vieler abgeschlossener Kreisscheiben u mit dem Durchmesser $d_u \leq \delta$ derart, daß jeder Punkt aus Λ innerer Punkt mindestens einer dieser

reisscheiben ist, so überdecken, da Λ kompakt ist, schon endlich viele Kreisscheiben $C_1,\dots,C_k$ aus $C(\delta,\Lambda)$ ganz Λ. C_i sei eine beliebige dieser k Kreisscheiben und r_i der zugehörige Radius.

Es sei nun n_1 die kleinste natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft: Unter allen $D_{(n_1)}$, die C_i schneiden, gibt es mindestens eine Kreisscheibe ${}^iD_{(n_1^o)}$ derart, daß von den in ${}^iD_{(n_1^o)}$ liegenden Kreisscheiben ${}^iD_{(n_1+1)}$ wiederum mindestens eine einen Radius $r_{(n_1+1)}$ mit $r_{(n_1+1)} \leq r_i$ hat.

Da n_1 die kleinste Zahl dieser Art ist, gilt für die Radien ${}^ir_{(n_1)}$ der C_i schneidenden Kreisscheiben ${}^iD_{(n_1)}$, ${}^ir_{(n_1)} > r_i$. Gilt $\delta < 2B_o$ mit $B_o = \max\{R_S \mid S \in M\}$, so existiert sicherlich eine derartige Zahl n_1.

Wir nehmen nun aus der Menge der ${}^iD_{(n_1)}$ alle Kreisscheiben, die die Eigenschaft von ${}^iD_{(n_1^o)}$ besitzen, heraus. Für jede der übrig bleibenden Kreisscheiben suchen wir nun eine entsprechende Zahl, das heißt:

Ist D eine derartige Kreisscheibe, so bestimmen wir die kleinste Zahl $n_D > n_1$ mit folgender Eigenschaft:

Unter allen $D_{(n_D)}$, die C_i schneiden und in D enthalten sind, gibt es mindestens eine Kreisscheibe ${}^iD_{(n_D^o)}$ derart, daß von den in ${}^iD_{(n_D^o)}$ liegenden Kreisscheiben $D_{(n_D+1)}$ mindestens eine einen Radius $r_{(n_D+1)}$ mit $r_{(n_D+1)} \leq r_i$ hat. Alle so gewonnenen Kreisscheiben ${}^iD_{(n_D^o)}$ lassen wir wieder außer Betracht und setzen das Verfahren für jede der übrig bleibenden Kreisscheiben fort. Da die Radien $r_{(n)}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen 0 streben, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. Wir gewinnen auf diese Weise zu jedem C_i ein System paarweise punktfremder Kreisscheiben

${}^iD_{(m_1)},\dots,{}^iD_{(m_{N(i)})}$ aus $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Radius ${}^ir_{(m_j)}$ von ${}^iD_{(m_j)}$ $(1 \leq j \leq N(i))$ ist größer

als r_i ${}^i r_{(m_j)} > r_i$

b) in ${}^i D_{(m_j)}$ gibt es mindestens eine Kreisscheibe vom Grade m_j+1 mit $r_{(m_j+1)} \leq r_i$.

c) $\bigcup_{j=1}^{N(i)} {}^i D_{(m_j)} \supset C_i \cap \Lambda$

Aus der Bedingung ${}^i r_{(m_j)} > r_i$ und der Tatsache, daß alle ${}^i D_{(m_j)}$ paarweise punktfremd sind, folgt, daß $N(i) \leq \varkappa$ $(i=1,\dots,k)$ für eine Konstante $\varkappa$ gilt (etwa $\varkappa=7$). Die Konstante $\varkappa$ ist unabhängig von der Überdeckung $C_1,\dots,C_k$.

Nach dem Vorhergehenden und Satz I 3 gilt für jedes $i \in \{1,\dots,k\}$ $j=1,\dots,N(i)$ und ein $r_{(m_j+1)}$

$$c_o \, {}^i r_{(m_j)} \leq r_{(m_j+1)} \leq r_i < {}^i r_{(m_j)}$$

Weiter gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{N(i)} {}^i D_{(m_j)} \supset \Lambda \qquad \text{und damit}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N(i)} ({}^i r_{(m_j)})^\eta \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N(i)} c_o^{-\eta} r_i^\eta \leq \varkappa c_o^{-\eta} \sum_{i=1}^{k} r_i^\eta \qquad (\eta > 0)$$

Ist $r_i \leq \delta$ für alle $i=1,\dots,k$, so folgt ${}^i r_{(m_j)} \leq c_o^{-1} \delta$

Bezeichnet $F^{\frac{\delta}{c_o}}$ eine Überdeckung von Λ , bestehend aus abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{(n)}$ $(n \in N)$, deren Durchmesser $\frac{\delta}{c_o}$ nicht überschreiten und ist r_d der Radius einer abgeschlossenen Kreisscheibe D aus $F^{\frac{\delta}{c_o}}$, so folgt der zuerst von T. Akaza* hergeleitete

* Siehe [6]

Satz I 4

Es gilt:

$$M'_\eta(\Lambda) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{F^\delta_{\varepsilon_0}} \sum_{D\in F^\delta_{\varepsilon_0}} (2r_d)^\eta \leq \varkappa c_0^{-\eta} M_\eta(\Lambda)$$

Mit Hilfe von Satz I 4 läßt sich nachfolgender Satz gewinnen.

Satz I 5

Existiert eine positive Zahl μ, so daß

$$\sum_{S_{(\nu)}} (R_{S_{(m+\nu)}})^\mu \geq (R_{S_{(m)}})^\mu \qquad \text{mit} \quad S_{(m+\nu)} = S_{(m)} S_{(\nu)}, \ m,\nu \text{ fest}$$

$$S_{(m)} = S_{l_m} \dots S_{l_1}; \quad S_{l_{k+1}} \neq S_{l_k}^{-1} \quad \text{für} \quad k=1,\dots,m-1 \quad ;$$

$$S_{(\nu)} = S_{i_\nu} \dots S_{i_1}; \ S_{i_{j+1}} \neq S_{i_j}^{-1} \quad \text{für} \quad j=1,\dots,\nu-1; \ S_{i_\nu} \neq S_{l_1}^{-1}$$

für jeden Radius $R_{S_{(m)}}$ eines isometrischen Kreises $H_{S_{(m)}}$ gilt, dann ist das $\frac{\mu}{2}$ - dimensionale Hausdorff-Maß von Λ positiv.

$R_{S_{(m+\nu)}}$ durchläuft für festes m alle Radien der $(N-1)^\nu$ isometrischen Kreise zu $S_{(m+\nu)}$.

Beweis des Satzes: Es werde Λ durch ein System von Kreisscheiben aus $F^\delta_{\varepsilon_0}$ überdeckt. Da Λ kompakt ist, kann man annehmen, daß $D_{(m_1)}, \dots, D_{(m_Q)}$; $D_{(m_j)} \in F^\delta_{\varepsilon_0}$; $j=1,\dots,Q$ die Menge Λ vollständig überdecken.

Es sei $m_0 = \min\{m_j \mid 1 \leq j \leq Q\}$

Ist nun $m_j - m_0 = p\nu + \tau$ p-ganz, $\nu > \tau > 0$, so ersetzen wir $D_{(m_j)}$ durch die $(N-1)^{\nu-\tau}$ abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{1(m_j')}, \dots, D_{(N-1)^{\nu-\tau}(m_j')}$, die in $D_{(m_j)}$ enthalten und vom

Grade $m'_j = m_o+(p+1)\nu$ sind. Damit erhält man eine neue Überdeckung $D_{(m''_1)}, \dots, D_{(m''_R)}$, $Q \leq R$, aus F^{ζ}, da ja bei dem Verfahren die Radien der überdeckenden Kreisscheiben nicht größer werden.

Aus Satz I 3 folgt:

$$(r_{(m_j)})^{\frac{\mu}{2}} \geq \left(\frac{1}{C_o}\right)^{\frac{\mu}{2}} (r_{m_j+1})^{\frac{\mu}{2}} \qquad (r_{(m_j)} \text{ -Radius von } D_{(m_j)}\ j=1,\dots,Q)$$

Durch $\nu-\tau$ malige Anwendung ergibt sich

$$(r_{(m_j)})^{\frac{\mu}{2}} \geq \left(\frac{1}{C_o}\right)^{\frac{\mu}{2}(\nu-\tau)} (r_{k(m'_j)})^{\frac{\mu}{2}} \qquad (r_{k(m'_j)} \text{-Radius von } D_{k(m'_j)}\ k=1,\dots,(N-1)^{\nu-\tau}\ )$$

$$(N-1)^{\nu-\tau} (r_{(m_j)})^{\frac{\mu}{2}} \geq \left(\frac{1}{C_o}\right)^{\frac{\mu}{2}(\nu-\tau)} \sum_{k=1}^{(N-1)^{\nu-\tau}} r_{k(m'_j)}$$

Die Summe erstreckt sich über alle Radien der Kreisscheiben vom Grade $m_j+\nu-\tau$, die in $D_{(m_j)}$ liegen.

Hieraus folgt, daß es eine Konstante $K=K(\nu,\mu,G)$ gibt, die nur von ν,μ,G abhängt, mit der Eigenschaft

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{Q} (r_{(m_j)})^{\frac{\mu}{2}} \geq K \sum_{l=1}^{R} (r_{(m''_l)})^{\frac{\mu}{2}} \qquad (r_{(m''_l)} \text{ -Radius von } D_{(m''_l)}\ l=1,\dots,R\ )$$

Weiter folgt aus (1)

$$(3) \quad \sum_{l=1}^{R} (r_{(m''_l)})^{\frac{\mu}{2}} \geq k_o(G)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{l=1}^{R} (R_{S_{(m''_l)}})^{\mu}$$

$S_{(m''_l)}$ ist diejenige Transformation aus G, die nach den obigen Ausführungen $D_{(m''_l)}$ eineindeutig zugeordnet wird.

Es sei nun $m_{max} = \max\{m''_j \mid 0 \leq j \leq R\}$; $m_{max} = m_o + \nu p_{max}$.

Die Kreisscheiben $D_{(m_1)}, \dots, D_{(m_Q)}$ können so gewählt

werden, daß sie paarweise punktfremd sind. Dann sind jedoch auch die Kreisscheiben $D_{(m_1'')}, \dots, D_{(m_R'')}$ paarweise punktfremd. Da dieses System die singuläre Menge Λ vollständig überdeckt und überdies für alle m_j'' gilt: $m_j'' = m_0 + \nu p$ (p-natürliche Zahl), muß es unter den Kreisscheiben $D_{(m_1'')}, \dots, D_{(m_R'')}$ ein System $\langle W_{m_{max}} \rangle$ von $(N-1)^\nu$ Kreisscheiben vom Grade m_{max} geben, die innerhalb einer Kreisscheibe vom Grade $m_{max} - \nu$ liegen.
Nach Voraussetzung des Satzes gilt:

$$\sum_{S_{(\nu)}} \left(R_{S_{(m_{max}-\nu)} S_{(\nu)}}\right)^\mu \geq \left(R_{S_{(m_{max}-\nu)}}\right)^\mu ,$$

wobei $S_{(\nu)} = S_{i_\nu} \dots S_{i_1}$ alle Transformationen durchläuft, die bei festem $S_{(m_{max}-\nu)} = S_{l_{m_{max}-\nu}} \dots S_{l_1}$ der Bedingung $S_{l_1} \neq S_{i_\nu}^{-1}$ genügen. Die $(N-1)^\nu$ Kreise vom Grade m_{max}, die innerhalb einer Kreisscheibe vom Grade $m_{max} - \nu$ liegen, können nämlich als Bilder der Ausgangskreise H_S ; $S \in M$; aufgefaßt werden derart, daß jede Transformation obiger Art genau einmal auftritt.
Wir ersetzen nun alle Systeme $\langle W_{m_{max}} \rangle$ durch das System der entsprechenden Kreisscheiben vom Grade $m_{max} - \nu$ und erhalten somit ein neues Überdeckungssystem $D_{(m_1''')}, \dots, D_{(m_T''')}$ $(T \leq R)$. Auf dieses System lassen sich die obigen Überlegungen wiederum anwenden. Für alle entsprechenden Systeme $\langle W_{m'_{max}} \rangle$ mit $m'_{max} = m_{max} - \nu$ gilt also

$$\sum_{S_{(\nu)}} \left(R_{S_{(m'_{max}-\nu)} S_{(\nu)}}\right)^\mu \geq \left(R_{S_{(m'_{max}-\nu)}}\right)^\mu$$

Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens erreicht man schließlich m_0 und es folgt:

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{R} \left(R_{S(m''_j)}\right)^{\mu} \geq \sum_{S(m_o)} \left(R_{S(m_o)}\right)^{\mu}$$

wobei über alle $R_{S(m_o)}$ zu summieren ist.
$m_o = p_o \nu + \tau_o \qquad (1 \leq \tau_o \leq \nu)$
Durch weitere Anwendung der obigen Überlegungen folgt

$$(5) \quad \sum_{S(m_o)} \left(R_{S(m_o)}\right)^{\mu} \geq \sum_{S(\tau_o)} \left(R_{S(\tau_o)}\right)^{\mu} \geq \min_{1 \leq \tau_o \leq \nu} \sum_{S(\tau_o)} \left(R_{S(\tau_o)}\right)^{\mu}$$

Aus (2),(3),(4) und (5) schließlich ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{Q} \left(r_{(m_j)}\right)^{\frac{\mu}{2}} \geq K k_o (G)^{\frac{\mu}{2}} \min_{1 \leq \tau_o \leq \nu} \sum_{S(\tau_o)} \left(R_{S(\tau_o)}\right)^{\mu} = K' \, ; \; K' > 0$$

Die Konstante K' ist unabhängig von der gewählten Überdeckung aus $F^{\delta}_{\tau_o}$.

Aus Satz I 4 folgt nun unmittelbar $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda) > 0$

q.e.d.

Der nachfolgende von T. Akaza bewiesene Satz liefert uns eine einfache Möglichkeit, die Voraussetzungen des Satzes I5 nachzuprüfen. Dazu müssen zunächst einige einführende Betrachtungen erläutert werden.
Es sei $S_{(n)i_o} = S_{i_n} \dots S_{i_1} \quad (S_{i_\varkappa} \in M; \varkappa = 1,\dots,n)$ eine Transformation mit $S_{i_1} \neq S_{i_o}$ für ein festes $S_{i_o} \in M$
Die Funktion

$$\chi_n^{(\mu, S_{i_o})}(x) = \sum_{S_{(n)i_o}} \left(\frac{R_{S_{(n)i_o}}}{\left|S^{-1}_{(n)i_o}(\infty) - x\right|} \right)^{\mu}$$

ist dann für alle $x \in D_{S_{i_o}}$ erklärt, wenn nur über alle $S_{(n)i_o}$ mit obiger Eigenschaft summiert wird.

Entsprechend den N Elementen aus M gibt es N derartige Funktionen bei festem μ und n.
$S^{-1}_{(n)i_0}(\infty)$ liegt in $D_{S_{i_1}}$ und wegen $S_{i_1} \neq S_{i_0}$ ist für alle $x \in D_{S_{i_0}}$ $|S^{-1}_{(n)i_0}(\infty) - x| \neq 0$.

Es sei nun $S_{(m)}$ ein Element der Art $S_{(m)} = S^{-1}_{i_0} S_{(m-1)}$.
Dann liegt $S_{(m)}(\infty)$ in $D_{S_{i_0}}$ und es gilt:

$$\chi_n^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty)) = \sum_{S_{(n)i_0}} \left(\frac{R_{S_{(n)i_0}}}{|S^{-1}_{(n)i_0}(\infty) - S_{(m)}(\infty)|} \right)^{\mu}$$

Mit $S_{(n)i_0}$ durchläuft $S^{-1}_{(n)i_0}$ alle Elemente der Art $S_{i_0(n)} = S_{j_n} \ldots S_{j_1}$ mit $S_{j_n} \neq S^{-1}_{i_0}$. Wegen $R_{S_{(n)}} = R_{S^{-1}_{(n)}}$ folgt

$$\chi_n^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty)) = \sum_{S_{i_0(n)}} \left(\frac{R_{S_{i_0(n)}}}{|S_{i_0(n)}(\infty) - S_{(m)}(\infty)|} \right)^{\mu}$$

Nun gilt (Siehe Abschnitt 1))

$$R_{S^{-1}_{(m)} S_{i_0(n)}} = \frac{R_{S^{-1}_{(m)}} R_{S_{i_0(n)}}}{|g_{S^{-1}_{i_0(n)}} - g_{S^{-1}_{(m)}}|} = \frac{R_{S^{-1}_{(m)}} R_{S_{i_0(n)}}}{|S_{i_0(n)}(\infty) - S_{(m)}(\infty)|}$$

also

$$(6) \quad \chi_n^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty)) = \sum_{S_{i_0(n)}} \left(\frac{R_{S^{-1}_{(m)} S_{i_0(n)}}}{R_{S^{-1}_{(m)}}} \right)^{\mu} ; \quad S^{-1}_{(m)} = S_{(m-1)} S_{i_0}$$

Mit Hilfe von (6) läßt sich nun der nachfolgende Satz beweisen.

<u>Satz I 6</u>
Gibt es eine natürliche Zahl n_0 und eine Konstante σ ($\sigma > 1$) so daß $\chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x) > \sigma > 1$ für $x \in \Lambda \cap D_{S_{i_0}}$ und alle

$S_{i_0} \in M$ gilt, dann ist $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda)$ positiv.

<u>Beweis:</u> $\chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x)$ ist stetig auf der kompakten Menge $D_{S_{i_0}}$ und damit gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta_{S_{i_0}}$, so daß für alle $x', x \in D_{S_{i_0}}$ mit $|x'-x| < \delta_{S_{i_0}}$ gilt:

$$\left| \chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x') - \chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x) \right| < \varepsilon$$

Es sei $\delta(\varepsilon) = \min_{S_{i_0}} \delta_{S_{i_0}}$

Zu jedem $x_0 \in \Lambda \cap D_{S_{i_0}}$ werde nun eine offene Kreisscheibe mit dem Radius $\delta(\varepsilon)$ und dem Mittelpunkt x_0 gebildet.
Diese Konstruktion werde für alle $D_{S_{i_0}}$ durchgeführt.
Dann gibt es ein m_0, so daß für alle $m \geq m_0$ $S_{(m)}(\infty)$ in einer derartigen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt x_0 liegt, denn zu jedem $x_0 \in \Lambda \cap D_{S_{i_0}}$ gibt es eine bestimmte Folge $D'_{(1)}, D'_{(2)}, \ldots, D'_{(n)}, \ldots$ mit $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D'_{(n)}$, $S'_{(n)}(\infty) \in D'_{(n)}$.
Da nach Satz I 3 die Radien der Kreisscheiben mit wachsendem Grad gleichmäßig gegen 0 streben, kann man ein m_0 mit den obigen Eigenschaften finden.
Es folgt:

$$\chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty)) \geq \chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x_0) - \left|\chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(x_0) - \chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty))\right|$$

$$\chi_{n_0}^{(\mu, S_{i_0})}(S_{(m)}(\infty)) \geq \sigma - \varepsilon > 1 \quad , \quad S_{(m)} = S_{i_0}^{-1} S_{(m-1)} \quad (m \geq m_0),$$

falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird.
Also folgt nach (6)

$$\sum_{S_{i_0(n_0)}} \frac{R_{S_{(m)}^{-1} S_{i_0(n_0)}}}{R_{S_{(m)}^{-1}}} > 1 \quad ; \quad \sum_{S_{i_0(n_0)}} \left(R_{S_{(m)}^{-1} S_{i_0(n_0)}}\right)^{\mu} > \left(R_{S_{(m)}^{-1}}\right)^{\mu}$$

Da diese Ungleichung für alle S_{i_0} zutrifft und $S_{(m)}^{-1}$ alle Elemente $S_{(m)}$ durchläuft, gilt sie für alle $R_{S_{(m)}}$ mit $m \geq m_0$.
Nach Satz I 5 folgt nun die Behauptung, denn die Aussage des Satzes gilt wie der Beweis unmittelbar zeigt auch unter der Bedingung $m \geq m_0$.
Aus den Sätzen I 6 und I 1 folgt

Satz I 7
Die Hausdorff-Dimension der singulären Menge Λ einer Kleinschen Gruppe G ist positiv.

Beweis: Nach Satz I 1 enthält G eine Untergruppe vom Ford-Typ, die von zwei hyperbolischen oder loxodromischen Transformationen T_1, T_2 erzeugt wird.
Wir untersuchen $\chi_1^{(\mu, S_{i_0})}(x)$ für $x \in D_{S_{i_0}}$; $S_{i_0} \in \{T_1, T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1}\} = M$

$$\chi_1^{(\mu, S_{i_0})}(x) = \sum_{\substack{S_i \neq S_{i_0} \\ S_i \in M}} \left(\frac{R_{S_i}}{|S_i^{-1}(\infty) - x|} \right)^{\mu} \qquad x \in D_{S_{i_0}}$$

Die rechte Summe besteht aus drei Summanden. Da $\frac{R_{S_i}}{|S_i^{-1}(\infty)-x|}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, gilt $\chi_1^{(\mu, S_{i_0})}(x) > \sigma > 1$ für ein σ und ein hinreichend kleines μ ; $\mu > 0$.

q.e.d.

Für die Untersuchungen des Kapitels II sei noch das folgende Beispiel aufgeführt.

Beispiel 1
Wir unterteilen den Einheitskreis in sechs gleichlange Kreisbögen wobei die Punkte 1 und -1 als Teilpunkte auftreten. Zu jedem der Kreisbögen bestimmen wir dann einen Orthokreis, der durch die Endpunkte des Bogens verläuft mit dem Radius $R = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und der Entfernung $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ des Mittelpunkts m_S vom Nullpunkt.
Bezeichnet man mit D_{S_i} (i=1,...,6) die zugehörigen abgeschlossenen endlichen Kreisscheiben und mit m_{S_i} den Mittelpunkt zu D_{S_i} , so erhält man zunächst rein formal

$$\sum_{i \neq i_0} \frac{R}{|m_{S_i} - x|} \geq \frac{2\,\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 3\,\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} > 1$$

für alle $x \in D_{S_{i_0}}$. Aus Symmetriegründen gilt diese Ungleichung für alle $D_{S_{i_0}}$ ($i_0 = 1,\dots,6$).
Verringern wir nun die Radien der Orthokreise um ein hinreichend kleines ε ($\varepsilon > 0$) bei entsprechender Änderung der Lage der Mittelpunkte, so kann man sicherlich ein $\sigma > 1$ finden, so daß

$$\sum_{i \neq i_0} \frac{R}{|m_{S_i} - x|} \geq \sigma > 1 \text{ gilt für alle } x \in D_{S_{i_0}} \text{ und alle}$$

$i_0 \in \{1,\dots,6\}$, wobei in dieser Summe R bzw. m_{S_i} den Radius bzw. den Mittelpunkt der so neu bestimmten Kreisscheibe D_{S_i} ($i=1,2,\dots,6$) bezeichnen.
Durch diese sechs Kreise H_{S_i} werden drei hyperbolische Transformationen S_1, S_2, S_3 bestimmt, die sich jeweils aus einer Spiegelung am Kreis H_{S_i} ($i=1,2,3$) und einer anschließenden Spiegelung an der reellen Zahlenachse zusammensetzen. Diese drei Transformationen erzeugen eine Fuchssche Gruppe G zweiter Art und es gilt:

$$\chi_1^{(1,S_{i_0})}(x) = \sum_{S_i \neq S_{i_0}} \frac{R}{|S_i^{-1}(\infty) - x|} \geq \sigma > 1$$

für alle $x \in D_{S_{i_0}}$ und alle $S_{i_0} \in \{S_1, S_2, S_3, S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}\}$,
wobei in der Summe über alle $S_i \in \{S_1, S_2, S_3, S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}\}$ mit $S_i \neq S_{i_0}$ summiert wird.
Aus dem Obigen ergibt sich sofort, daß eine derartige Ungleichung auch noch für ein $\mu > 1$ gültig ist.
Nach Satz I 6 gilt für diese Gruppe G $d(\Lambda) > \frac{1}{2}$.

4) Die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ für Gruppen vom Ford-Typ mit periodischen Untergruppen

Wir beweisen nun

Satz I 8

Enthält die Kleinsche Gruppe G mit der singulären Menge Λ eine periodische Untergruppe, so gilt $d(\Lambda) > \frac{1}{2}$.

Beweis: Die Gruppe G enthält ein parabolisches Element S mit dem Fixpunkt p_0. Wir können dann eine Transformation A finden, die p_0 auf ∞ abbildet, so daß $T = ASA^{-1}$ eine Translation $T(x) = x+\lambda$ mit reeller Periode λ ist.
Da $G_A = AGA^{-1}$ mindestens drei Grenzpunkte besitzt, kann man mit Hilfe von Lemma I 1 zunächst schließen, daß es zu zwei vorgegebenen punktfremden endlichen Umgebungen U_1, U_2 zweier endlicher Grenzpunkte z_1, z_2 $(z_1 \in U_1;\ z_2 \in U_2;\ z_1, z_2 \neq \infty)$ eine hyperbolische oder loxodromische Transformation aus G_A mit den Fixpunkten p_1, p_2 gibt, derart, daß $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ gilt. Dann gibt es jedoch auch eine Transformation T' aus G mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen isometrischen Kreise $H_{T'}, H_{T'^{-1}}$ in U_1 bzw. U_2 liegen $(H_{T'} \subset U_1;\ H_{T'^{-1}} \subset U_2)$.
Man kann also eine hyperbolische oder loxodromische Transformation $S_0 \in G_A$ finden derart, daß $H_{S_0}, H_{S_0^{-1}}$ beide innerhalb eines Streifens $(a < \operatorname{Re} z < b)$ der Breite $|\lambda|$ liegen. Ist T^n $(n \in Z)$ eine Potenz von T, so ist offenbar $H_{S_n} = T^n(H_{S_0})$ der isometrische Kreis von $S_n = T^n S_0 T^{-n}$, denn für alle z auf H_{S_n} ist der Betrag der Ableitung von S_n gleich 1 ; $|S_n'(z)| = 1$.
Weiter gilt: $S_n T^n(H_{S_0}) = T^n(H_{S_0^{-1}})$ also $H_{S_n^{-1}} = T^n(H_{S_0^{-1}})$.
Allgemein wollen wir mit $H_{S(k,n)}$ den isometrischen Kreis $T^n(H_{S_k})$ von $S(k,n) = T^n S_k T^{-n}$ bezeichnen $(S(k,n) = S_{k+n})$
Es sei

$$Q(k,n) = \left\{ H_{S(k,\nu)} \,\middle|\, 0 < |\nu| \leq n;\ k,\nu \in Z;\ \begin{array}{l}\text{n-natürliche Zahl}\\ \text{n,k fest}\end{array} \right\}$$

$$W(k,n) = \left\{ S(k,\nu) \,\middle|\, 0 < |\nu| \leq n;\ \nu,k \in Z;\ \begin{array}{l}\text{n-natürliche Zahl}\\ \text{n,k fest}\end{array} \right\}$$

Wir betrachten nun zunächst alle Bilder

$S_0 S(0,\nu)(H_{S(0,\nu)})$; mit $S(0,\nu) \in W(0,n_0)$, $H_{S(0,\nu)} \in Q(0,n_0)$

n_0- fest

Diese Bilder (Anzahl $2n_0$) liegen alle in $D_{S_0^{-1}}$ und sind paarweise punktfremd. Zu jedem k mit $1 \leq |k| \leq n_0$ betrachten wir weiter die Bilder

$S_0 S(0,k)S(k,\nu)(H_{S(k,\nu)})$ mit $S_{(k,\nu)} \in W(k,n_0)$, $H_{S(k,\nu)} \in Q(k,n$

Jeder Bildkreis $S_0 S(0,\nu)(H_{S(k,\nu)})$ umfaßt genau $2n_0$ dieser Bild

Der isometrische Kreis von $S_0 S(0,\nu)$ liegt innerhalb von $D_{S(0,\nu)}$ ($D_{S(0,\nu)}$ - die von $H_{S(0,\nu)}$ berandete abgeschlossene endliche Kreisscheibe), der von $S_0 S(0,k)S(k,\nu)$ innerhalb von $D_{S(k,\nu)}$. Bezeichnet man mit $S_{(1)}$ allgemein eine Transformation $S_0 S(0,\nu)$, so wird $S_{(n)}$ induktiv nach folgender Vorschrift bestimmt:

Ist $S_{(n)}$ eine Transformation mit dem isometrischen Kreis $H_{S(n)}$ innerhalb der Kreisscheibe D_{S_k} , so sei $S_{(n+1)}$ allgemein eine der Transformationen $S_{(n)}S(k,\nu)$ mit $S(k,\nu) \in W(k,n_0)$;

$S_{(n+1)} = S_{(n)}S(k,\nu)$. Der isometrische Kreis von $S_{(n)}S(k,\nu)$ liegt innerhalb der Kreisscheibe $D_{S(k,\nu)} = D_{S_{k+\nu}}$.

Liegt der isometrische Kreis von $S_{(m)}$ innerhalb von D_k, so wollen wir den Bildkreis $S_{(m)}(H_k)$ (bzw. die zugehörige Kreisscheibe) als Kreis (bzw. Kreisscheibe) vom Grade m mit dem Radius $r_{(m)}$ bezeichnen. Innerhalb einer Kreisscheibe vom Grade m liegen dann genau $2n_0$ Bildkreise vom Grade m+1. Für die Radien $R_{S(m+1)}$ der isometrischen Kreise zu $S_{(m+1)}$ folgt:

$$(7) \qquad R_{S(m+1)} = \frac{R_{S(m)} R_{S_{k+\nu}}}{\left| S_{k+\nu}(\infty) - S^{-1}_{(m)}(\infty) \right|} \quad ; \quad S_{(m+1)} = S_{(m)} S_{k+\nu}$$

Aus der Definition für $S_{(m)}$ und $S_{k+\nu}$ folgt

$$(8) \qquad |\nu| b_0 \geq \left| S_{k+\nu}(\infty) - S^{-1}_{(m)}(\infty) \right| \geq R_{S_0} + h_0$$

mit geeigneten von n_o unabhängigen positiven Konstanten b_o, h_o .
Weiter gilt:

$$(9) \quad q_1 R^2_{S(m)} \geq r_{(m)} \geq q_o R^2_{S(m)} \quad ; \quad q_3 r_{(m)} < r_{(m+1)} < q_2 r_{(m)}$$

für $D_{(m+1)} \subset D_{(m)}$ mit geeigneten von n_o unabhängigen Konstanten q_o, q_1, q_2 ($q_o, q_1, q_2 > 0$; $q_2 < 1$), wobei $S_{(m)}$ die entsprechende der Kreisscheibe $D_{(m)}$ vom Radius $r_{(m)}$ zugeordnete Transformation ist. Die Konstante q_3 ($q_3 > 0$) hängt von n_o ab.
Die Gültigkeit der Ungleichungen (9) erkennt man folgendermaßen:
Der Punkt $S^{-1}_{(m)}(\infty)$ hat nach Konstruktion von dem Kreis H_{S_k} dessen zugehörige Kreisscheibe D_{S_k} in ihrem Innern $H_{S(m)}$ enthält, einen Abstand, der unabhängig von m eine positive Grenze nicht unterschreitet. Hieraus folgt leicht die erste der Ungleichungen (9).
Ist $D_{(m)}$ die vom Bildkreis $H_{(m)}$ vom Grade m berandete abgeschlossene endliche Kreisscheibe, so bestimmt nach (9) jede Folge $\{D_{(m)}\}$ mit $D_{(m+1)} \subset D_{(m)}$, $m \to \infty$ genau einen Grenzpunkt von G_A . Also ist $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{S(m)} D_{(m)} = \Lambda^*_A$ eine Teilmenge der singulären Menge Λ_A von G_A, die ganz in $D_{S_o^{-1}}$ liegt.
Aus (7) und (8) folgt nun

$$\sum_{S(k,\nu)} \frac{R_{S(m+1)}}{R_{S(m)}} \geq \sum_{S(k,\nu)} \frac{R_{S_{k+\nu}}}{|\nu| b_o} \geq \frac{R_{S_o}}{b_o} \sum_{\nu=1}^{n_o} \frac{1}{\nu} \quad ,$$

wobei über alle $S(k,\nu)$; $S_{(m+1)} = S_{(m)} S(k,\nu)$; mit $S(k,\nu) \in W(k,n_o)$ summiert wird.
Für hinreichend großes n_o wird die rechte Seite der obigen Ungleichung größer als 1.
Also gilt:

$$(10) \quad \sum_{S(k,\nu)} R_{S(m+1)} > R_{S(m)}; \; S_{(m+1)} = S_{(m)} S(k,\nu), \; S(k,\nu) \in W(k,n_o)$$

und damit

(11) $\sum_{S_{(m+1)}} R_{S_{(m+1)}} \geq \sum_{S_{(m)}} R_{S_{(m)}}$, wobei über alle $S_{(m+1)}$ bzw. $S_{(m)}$ summiert wird.

Ist $D_{(m_1)}, D_{(m_2)}, \ldots, D_{(m_Q)}$ ein Überdeckungssystem von Λ_A^* mit $D_{(m_j)} \cap D_{(m_k)} = \emptyset$ für $j \neq k$ $(j,k=1,2,\ldots,Q)$, so gilt nach (9)

$$\sum_{j=1}^{Q} (r_{(m_j)})^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{q_0} \sum_{j=1}^{Q} R_{S_{(m_j)}}$$

Ist $m_0 = \min_{1 \leq j \leq Q} m_j$, so kann man mit Hilfe von (10) das Beweisverfahren zu Satz I 5 anwenden.

Es folgt nach (11)

$$\sum_{j=1}^{Q} R_{S_{(m_j)}} \geq \sum_{S_{(m_0)}} R_{S_{(m_0)}} \geq \ldots \sum_{S_{(1)}} R_{S_{(1)}} = B_0 \qquad (B_0 > 0) ,$$

also $\sum_{j=1}^{Q} (r_{(m_j)})^{\frac{1}{2}} \geq B_0 \sqrt{q_0}$.

Nun folgt aus Satz I 4 , dessen Voraussetzungen hier offenbar erfüllt sind, sofort, daß das $\frac{1}{2}$-dimensionale Hausdorff-Maß $M_{\frac{1}{2}}(\Lambda_A^*)$ von Λ_A^* größer als 0 ist (einschließlich des Falles $M_{\frac{1}{2}}(\Lambda_A^*) = +\infty$).

Wie aus dem Beweis unmittelbar hervorgeht, kann man n_0 so wählen, daß statt (10)

$$\sum_{S_{k+v}} (R_{S_{(m+1)}})^{\mu} > (R_{S_{(m)}})^{\mu} \qquad \text{für ein } \mu > 1 \text{ gilt.}$$

Für ein derartiges μ folgt dann $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda_A^*) > 0$.

Offenbar ist $A^{-1}(\Lambda_A^*)$ eine Teilmenge der singulären Menge von G. Wir dürfen voraussetzen, daß $A^{-1}(\Lambda_A^*)$ in einer beschränkten Menge M_1 liegt außerhalb einer Umgebung von p_0, denn andernfalls betrachten wir eine Menge $T^n(\Lambda_A^*), n \in Z$, deren Hausdorff-Dimension mit derjenigen von Λ_A^* übereinstimmt. Da für jede in M_1 verlaufende Strecke s gilt

$$c_2 L(s) \leq L(A(s)) \leq c_1 L(s) \qquad (c_1, c_2 > 0;\ c_1, c_2 \text{ konstant});$$

L(s)-Länge von s, L(A(s))-Länge von A(s);

(A genügt in M_1 einer Lipschitzbedingung), folgt hieraus $M_{\frac{4}{2}}(\Lambda) > 0$, denn liegt eine Überdeckung C_δ von $A^{-1}(\Lambda_A^*)$ durch abgeschlossene Kreisscheiben D_i mit den entsprechenden Radien $r_i \leq \delta$ vor, so werden diese durch A auf Kreisscheiben D_i' mit den Radien r_i' ($r_i' \leq c_1 r_i$) abgebildet, die ganz Λ_A^* überdecken. Die positiven Konstanten c_1, c_2 sind unabhängig von einer derartigen Überdeckung, falls δ hinreichend klein ist.

Es gilt:

$$\sum_i (r_i)^{\frac{4}{2}} \geq c_1^{-\frac{4}{2}} \sum_i (r_i')^{\frac{4}{2}} \geq c_1^{-\frac{4}{2}} \inf_{C_{\delta c_1}} \sum (r_i')^{\frac{4}{2}} , \quad \text{also}$$

$$\inf_{C_\delta} \sum_i (r_i)^{\frac{4}{2}} \geq c_1^{-\frac{4}{2}} \inf_{C_{\delta c_1}} \sum_i (r_i')^{\frac{4}{2}} \qquad \text{und damit}$$

$$M_{\frac{4}{2}}(A^{-1}(\Lambda_A^*)) \geq c_1^{-\frac{4}{2}} M_{\frac{4}{2}}(\Lambda_A^*) .$$

Vertauscht man in der obigen Betrachtung A und A^{-1}, so erhält man eine ähnliche Ungleichung und man erkennt, daß $A^{-1}(\Lambda_A^*)$ und Λ_A^* dieselbe Hausdorff-Dimension besitzen.

Wegen $A^{-1}(\Lambda_A^*) \subset \Lambda$ gilt also $d(\Lambda) > \frac{1}{2}$.

Damit ist Satz I 8 vollständig bewiesen.

Satz I 9

Enthält die Kleinsche Gruppe G mit der singulären Menge Λ eine doppelt-periodische Untergruppe U, so folgt $d(\Lambda) > 1$.

Beweis: Die Untergruppe U wird von zwei parabolischen Transformationen T_1, T_2 mit dem gemeinsamen Fixpunkt p_0 erzeugt. Wir wählen nun eine geeignete Transformation A, die p_0 auf ∞ abbildet. Die Elemente aus $U_A = AUA^{-1}$ sind dann genau die Elemente $T^{n,m}$ mit

$$T^{n,m}(z) = z + n\omega_1 + m\omega_2 \; ; \; n,m \in Z \qquad \begin{array}{l}\omega_1 \text{-Periode von } AT_1A^{-1} \\ \omega_2 \text{-Periode von } AT_2A^{-1}.\end{array}$$

Wir können A so wählen, daß ω_1 reell ist.

Ebenso wie im Beweis zu Satz I 8 bestimmen wir nun mit Hilfe von Lemma I 1 eine Transformation S_0 derart, daß $H_{S_0}, H_{S_0^{-1}}$ innerhalb eines Parallelogramms mit den

Seitenlängen $|\omega_1|$ und $|\omega_2|$ liegen. Der Kreis $H_{S_{n,m}} = T^{n,m}(H_{S_0})$ ist dann isometrischer Kreis der Transformation $S_{n,m} = T^{n,m} S_0 T^{-n,-m}$.

Es seien $H_{S_{l,k}^{\alpha,\beta}} = H_{S_{l+\alpha,k+\beta}} = T^{\alpha,\beta}(H_{S_{l,k}})$ der isometrische Kreis der Transformation $T^{\alpha,\beta} S_{l,k} T^{-\alpha,-\beta} = S_{l+\alpha,k+\beta}$ $l,k,\alpha,\beta \in Z$,

$$Q(l,k,n) = \left\{ H_{S_{l,k}^{\alpha,\beta}} \;\middle|\; \begin{array}{l} l,k,\alpha,\beta \in Z;\ (\alpha,\beta) \neq (0,0);\ l,k,n \text{ fest} \\ |\alpha| \leq n;\quad |\beta| \leq n \end{array} \right\},$$

$$W(l,k,n) = \left\{ S_{l,k}^{\alpha,\beta} \;\middle|\; \begin{array}{l} l,k,\alpha,\beta \in Z;\ (\alpha,\beta) \neq (0,0);\ l,k,n \text{ fest} \\ |\alpha| \leq n;\quad |\beta| \leq n \end{array} \right\}.$$

Wie betrachten zunächst ähnlich wie im Beweis zu Satz I 8 alle Bilder $S_0 S_{0,0}^{\alpha,\beta}(H_{S_{0,0}^{\alpha,\beta}})$ für alle $S_{0,0}^{\alpha,\beta} \in W(0,0,n_0)$ mit fest gewähltem n_0.

Diese Bilder liegen sämtlich in $D_{S_0^{-1}}$. Der isometrische Kreis von $S_0 S_{0,0}^{\alpha,\beta}$ liegt nach Voraussetzung in $D_{S_{0,0}^{\alpha,\beta}} = D_{S_{\alpha,\beta}}$.

Wir wollen wieder allgemein $S_0 S_{0,0}^{\alpha,\beta}$ mit $S_{(1)}$ bezeichnen und das Bild $S_0 S_{0,0}^{\alpha,\beta}(H_{S_{0,0}^{\alpha,\beta}})$ als Bildkreis vom Grade 1.

Wie im Beweis zu Satz I 8 bestimmen wir $S_{(n)}$ (n-natürliche Zahl) induktiv:

Liegt $H_{S_{(n)}}$ innerhalb der Kreisscheibe $D_{S_{l,k}}$, so sei $S_{(n+1)}$ allgemein eine Transformation $S_{(n+1)} = S_{(n)} S$ mit $S \in W(l,k,n_0)$.

Das Bild $S_{(n)}(H_{S_{l,k}})$ $(D_{S_{(n)}} \subset D_{S_{l,k}})$ (bzw. die zugehörige endliche abgeschlossene Kreisscheibe) bezeichnen wir als Kreis (bzw. Kreisscheibe) vom Grade n.

Innerhalb einer Kreisscheibe vom Grade n liegen dann genau $(2n_0+1)^2 - 1$ Bildkreise vom Grade n+1.

Die Menge $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{S_{(n)}} D_{(n)} = \Lambda_A^*$ ist offensichtlich wieder eine Teilmenge der singulären Menge Λ_A von $G_A = AGA^{-1}$.

Ferner gilt:

$$(12)\quad \sum_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}\in W(1,k,n_0)} \left(\frac{R_{S_{(m+1)}}}{R_{S_{(m)}}}\right)^2 = \sum_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}\in W(1,k,n_0)} \left(\frac{R_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}}}{\left|S_{1,k}^{\alpha,\beta}(\infty) - S_{(m)}^{-1}(\infty)\right|}\right)^2 ,$$

wobei jeweils über alle $S_{(m+1)} = S_{(m)} S_{1,k}^{\alpha,\beta}$ mit $S_{1,k}^{\alpha,\beta} \in W(1,k,n_0)$, $D_{S_{(m)}} \subset D_{S_{1,k}}$; summiert wird.

Für die rechte Seite der Ungleichung (12) folgt weiter wegen $R_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}} = R_{S_0}$ und aufgrund obiger Konstruktion

$$(13)\quad \sum_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}} \left(\frac{R_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}}}{\left|S_{1,k}^{\alpha,\beta}(\infty) - S_{(m)}^{-1}(\infty)\right|}\right)^2 \geq \frac{R_{S_0}^2}{b_0^2}\left(\frac{8}{1^2} + \frac{2\cdot 8}{2^2} + \dots + \frac{n_0\cdot 8}{n_0^2}\right)$$
$$= 8\,\frac{R_{S_0}^2}{b_0^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n_0}\right)$$

mit einer geeigneten Konstanten b_0 ($b_0 > 0$), die nicht von n_0 abhängt. Für hinreichend großes n_0 folgt aus (12) und (13)

$$(14)\qquad \sum_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}} \left(R_{S_{(m+1)}}\right)^2 \geq \left(R_{S_{(m)}}\right)^2$$

Aus dem obigen Beweisgang ersieht man sofort, daß eine derartige Ungleichung auch noch für ein $\mu > 2$ gilt.

$$(15)\qquad \sum_{S_{1,k}^{\alpha,\beta}} \left(R_{S_{(m+1)}}\right)^{\mu} \geq \left(R_{S_{(m)}}\right)^{\mu} \qquad \mu > 2$$

Da auch hier den Ungleichungen (9) äquivalente Ungleichungen gelten (was man aufgrund vorhergehender Abschätzungen (Siehe Seite 13) leicht einsieht), läßt sich ebenso wie im Beweis zu Satz I 8 $d(\Lambda_A^*) > 1$ schließen. Dann gilt auch $d(\Lambda) > 1$.

q.e.d.

Bemerkung:

Aus Satz I 9 folgt unmittelbar die bekannte Tatsache, daß eine Fuchssche Gruppe mit mindestens drei Grenzpunkten keine doppelt-periodische Untergruppe enthalten kann.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß die Grenzen 0, $\frac{1}{2}$, und 1 im allgemeinen die bestmöglichen Grenzen bilden. Dazu beweisen wir vorerst den nachfolgenden Satz.

Satz I 10

Für jede Gruppe G vom Ford-Typ mit der singulären Menge Λ gilt:

Aus der Konvergenz von $\sum_{V \in G-\{I\}} (R_V)^{\mu}$ folgt $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda) = 0$.

Beweis: Für Gruppen ohne parabolische Erzeugende folgt die Aussage des Satzes sofort aus der Ungleichung (1). Enthält hingegen das Erzeugendensystem ein parabolisches Element, so bedarf es eines besonderen Beweises.

Wir bezeichnen wieder mit H die vorgegebenen, die Erzeugenden bestimmenden Kreise und allgemein mit D die von den Kreisen H berandeten abgeschlossenen endlichen Kreisscheiben. Die Vereinigung einer Kreisscheibe D mit allen Kreisscheiben D_i $(i=1,\dots,\varkappa;\ \varkappa \leq 4)$; die mit D einen nichtleeren Durchschnitt haben, ergibt eine abgeschlossene Menge, die wir allgemein mit F bezeichnen. Die N Ausgangskreise bestimmen also endlich viele Mengen $F_1, F_2, \dots, F_n$; $n < N$.

Es sei nun $x_o \in \Lambda$ ein Grenzpunkt, der nicht parabolischer Fixpunkt eines Elements $S \in G$ ist.

x_o liegt in einer Menge F_{i_o} , $F_{i_o} \in \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.

Besteht F_{i_o} nur aus einer Kreisscheibe D_{i_o} , deren Rand H_{i_o} der isometrische Kreis einer Transformation S_{i_o} ist, so bildet $S_{i_o}^{-1}$ mit dem isometrischen Kreis $H_{S_{i_o}^{-1}}$ und der zugehörigen Kreisscheibe $D_{S_{i_o}^{-1}}$ alle außerhalb von $D_{S_{i_o}^{-1}}$ liegenden Mengen aus $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ auf n-1 Bildmengen in $D_{S_{i_o}}$ ab. Der Punkt x_o muß dann wiederum in einer dieser Bildmengen liegen.

Ist hingegen F_{i_o} die Vereinigung der Kreisscheiben $D_{i_1}, \dots, D_{i_\varkappa}$ $(1 < \varkappa \leq 4)$, so betrachten wir alle Bilder

$S(F_{i_j})$; $F_{i_j} \neq F_{i_o}$; $F_{i_j} \in \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$

mit $S \in G_{F_{i_o}}$, wobei $G_{F_{i_o}}$ die durch die vorgegebenen

Kreise $H_{i_1}, \ldots, H_{i_\varkappa}$ bestimmte periodische Untergruppe ist.

(Die Verhältnisse sind leicht zu überblicken, wenn man durch eine Transformation A den durch $G_{F_{i_0}}$ bestimmten parabolischen Fixpunkt p_o nach ∞ transformiert)

Die Bilder $S(F_{i_j})$ sind paarweise punktfremd und häufen sich nur gegen den durch $G_{F_{i_0}}$ bestimmten parabolischen Fixpunkt p_o. Nach Voraussetzung muß x_o wiederum in einer dieser Bildmengen liegen.

Es gibt also in jedem Fall ein $F_{i_1} \in \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ und ein $S_1 \in G$ mit $x_o \in S_1(F_{i_1})$. Der isometrische Kreis von S_1 liegt dabei in einem $F_k \neq F_{i_1}$, $F_k \in \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$.

Offenbar gibt es, da x_o nach Voraussetzung kein parabolischer Fixpunkt ist, ein F_{i_2}, derart, daß für ein $S_2 \in G$ $S_2(F_{i_2}) \subset S_1(F_{i_1})$ mit $x_o \in S_2(F_{i_2})$ gilt, wobei der isometrische Kreis von S_2 in einem $F_k \neq F_{i_2}$ liegt.

Diese Betrachtungsweise läßt sich nun beliebig fortsetzen. Wir gewinnen so eine Folge $\{F_{i_j}\}$ $(j=1,2,\ldots)$ $F_{i_j} \in \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ und eine zugehörige Folge $\{S_j\}$ paarweise verschiedener Transformationen S_j aus G, so daß $x_o \in S_j(F_{i_j})$ gilt. Der isometrische Kreis von S_j liegt dabei in einem $F_k \neq F_{i_j}$, $F_k \in \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$.

Für jede Folge $\{S_j\}$; $S_j \in G$; konvergiert die Folge der zugehörigen Radien R_{S_j} der isometrischen Kreise von S_j gegen 0.*

Hieraus folgt: $\{x_o\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j(F_{i_j})$

Jedes Bild $S(F_i)$, $S \in G$, $F_i \cap H_S = \emptyset$ besteht aus der Vereinigung von höchstens vier abgeschlossenen Kreisscheiben. Ist r_S^{Max} das Maximum der entsprechenden Radien, so gilt offensichtlich

$$(16) \qquad r_S^{Max} \leq k \cdot R_S^2 \qquad \text{für eine geeignete}$$

Konstante k , die nur von G abhängt.

* Siehe [19]

Da zu jedem $S \in G$ genau n-1 Bilder entsprechend des aus n Elementen bestehenden Systems $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ gehören, folgt:

$$(17) \qquad \sum r_S^{Max} \leq k\,(n-1) \sum_{S \in G - \{I\}} R_S^2$$

Weiter folgt aus (16) und (17)

$$(18) \qquad \sum (4 r_S^{Max})^{\frac{\mu}{2}} \leq k_0 \sum_{S \in G - \{I\}} (R_S)^{\mu} \qquad (\mu > 0)$$

mit einer Konstanten k_0, die nur von μ und G abhängt.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wird nach Voraussetzung die rechts in der Ungleichung (18) stehende Summe nach Herausnahme endlich vieler Elemente aus G kleiner als ε. Entsprechendes gilt dann für die linke Summe. Da nach dem Obigen jeder Grenzpunkt x_0, der nicht parabolischer Fixpunkt ist, in unendlich vielen paarweise verschiedenen Bildern $S_j(F_{i_j})$ liegt, ist $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda') < \varepsilon$, wobei Λ' die Gesamtheit aller derartigen Grenzpunkte ist. Es folgt also $M_{\frac{\mu}{2}}(\Lambda') = 0$.

Die parabolischen Fixpunkte bilden eine abzählbare Menge M_1, da G selbst aus abzählbar vielen Elementen besteht. Zu beliebig kleinem ε ($\varepsilon > 0$) kann man zu vorgegebenem μ ($\mu > 0$) eine Folge $\{\varepsilon_i\}$ (i=1,2,...) finden mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon_i)^{\frac{\mu}{2}} < \varepsilon$$

Überdeckt man die abzählbar vielen Punkte $p_1, p_2, \dots$ von M_1 durch abgeschlossene Kreisscheiben mit den entsprechenden Radien $\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \dots$ und den Mittelpunkten $p_1, p_2, \dots$, so erkennt man, daß $M_{\frac{\mu}{2}}(M_1) < \varepsilon$ und damit $M_{\frac{\mu}{2}}(M_1) = 0$ gilt.

q.e.d.

Anhand der nachfolgenden Beispiele 2),3) und 4) zeigen wir nun, daß $\frac{1}{2}$, 1 und 0 die bestmöglichen Grenzen im entsprechenden Sinne der vorhergehenden Abschnitte sind.

Beispiel 2

Zwei Orthokreise des Einheitskreises mit gleichem Radius, die sich im Punkt 1 berühren, seien die isometrischen Kreise $H_{S_0}, H_{S_0^{-1}}$ ($D_{S_0} \cap D_{S_0^{-1}} = \{1\}$; Radien: $R_{S_0}, R_{S_0^{-1}}$, $R_{S_0} = R_{S_0^{-1}}$) zweier parabolischer Transformationen S_0, S_0^{-1} mit dem Fixpunkt 1. Ein weiterer Kreis H_A (Radius R_A), der $D_{S_0} \cup D_{S_0^{-1}}$ nicht trifft und sowohl die reelle Achse als auch den Einheitskreis senkrecht schneidet, sei isometrischer Kreis einer elliptischen Transformation A mit der Periode 2 und reellen Fixpunkten ($A^2 = I$).

Die beiden Transformationen A, S_0 erzeugen eine Fuchssche Gruppe G zweiter Art. Ist G_{S_0} die von S_0 erzeugte einfachperiodische Untergruppe von G, so konvergiert

$\sum_{S \in G_{S_0} - \{I\}} (R_S)^\mu$ genau für $\mu > 1$, denn für S_0^n ($n \in \mathbb{Z}$) gilt:

$$\frac{1}{S_0^n(z)-1} = \frac{1}{z-1} + n\omega \qquad \omega \text{ -konstant}$$

also $$S_0^n(z) = \frac{(1+n\omega)z-n\omega}{n\omega z+(1-n\omega)}$$

Wegen $(1+n\omega)(1-n\omega) + (n\omega)^2 = 1$ folgt $R_{S_0^n} = \frac{1}{|n\omega|}$

Die obige Summe konvergiert also genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\mu$ konvergiert und das ist genau für $\mu > 1$ der Fall.

Wir betrachten nun zunächst alle Elemente aus G mit der Darstellung

(20) $S_0^{n_k} A S_0^{n_{k-1}} A \ldots A S_0^{n_1} = S$ mit $n_j \in \mathbb{Z}$ $j=1,\ldots,k$

$n_j \neq 0$.

Aus

$$(21) \qquad R_{AS_o^n} = \frac{R_A\ R_{S_o^n}}{|S_o^n(\infty)-A(\infty)|} \leq \frac{R_A\ R_{S_o^n}}{q}$$

mit $q = \min\limits_{\substack{z_A \in H_A \\ z_S \in H_S \cup H_{S^{-1}}}} |z_A - z_S|$ folgt aufgrund obiger

Konstruktion

$$R_{S_o^{n_k} AS_o^{n_{k-1}} \dots AS_o^{n_1}} \leq \frac{R_{S_o^{n_k}} R_A\ R_{S_o^{n_{k-1}}} \dots R_A\ R_{S_o^{n_1}}}{q^{2k-2}}$$

Hieraus ergibt sich

$$\sum (R_S)^{\mu} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_A}{q^2}\right)^{\mu}\right]^{k-1} \left(\sum_{S\in G_{S_o}-\{I\}} (R_S)^{\mu}\right)^k = \left(\frac{q^2}{R_A}\right)^{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_A}{q^2}\right)^{\mu} \sum_{S\in G_{S_o}-\{I\}} (R_S)^{\mu}\right]^k ,$$

wobei auf der linken Seite der Ungleichung über alle $S \in G$ mit der Darstellung (20) summiert wird. Zu vorgegebenem $\mu > 1$ wählen wir nun R_A so klein, daß

$$\left(\frac{R_A}{q^2}\right)^{\mu} \sum_{S\in G_{S_o}-\{I\}} (R_S)^{\mu} < 1 \quad \text{wird.}$$

Dann folgt sofort die Konvergenz der Reihe $\sum (R_S)^{\mu}$

Durchläuft S alle Elemente aus G mit der Darstellung (20), so haben alle von S verschiedenen Elemente aus G eine Darstellung AS oder SA oder ASA oder A.
Hieraus folgt mit Hilfe einer (21) entsprechenden Ungleichung sofort, daß man zu vorgegebenem $\mu > 1$ R_A so klein wählen kann, daß $\sum\limits_{S\in G-\{I\}} (R_S)^{\mu}$ konvergiert.

Aus Satz I 10 folgt nun, daß die Grenze $\frac{1}{2}$ im allgemeinen nicht erhöht werden kann.

Beispiel 3

Ähnlich wie in Beispiel 2 gehen wir von fünf Kreisen aus, von denen vier zwei parabolische Transformationen S_1, S_2

mit gemeinsamem Fixpunkt p_o bestimmen. Diese vier Kreise seien die isometrischen Kreise $H_{S_1}, H_{S_1^{-1}}, H_{S_2}, H_{S_2^{-1}}$ zu $S_1, S_1^{-1}, S_2, S_2^{-1}$ und sollen so gewählt werden, daß H_{S_1} den Kreis H_{S_2} senkrecht schneidet. S_1, S_2 sind Erzeugende einer doppelt-periodischen Gruppe G_2.

Der fünfte Kreis, der die Vereinigung der übrigen vier abgeschlossenen endlichen Kreisscheiben $D_{S_1}, D_{S_1^{-1}}, D_{S_2}, D_{S_2^{-1}}$ nicht trifft, sei isometrischer Kreis einer elliptischen Transformation A mit der Periode 2.

Die Reihe $\sum_{S\in G_2-\{I\}} (R_S)^\mu$ konvergiert genau für $\mu > 2$, denn für jedes $S_{n,m} \in G_2$; $S_{n,m} = S_1^n S_2^m$ gilt

$$\frac{1}{S_{n,m}(z)-p_o} = \frac{1}{z-p_o} + n\omega_1 + m\omega_2 \qquad \omega_1, \omega_2\text{-konstant}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ nicht reell; } n,m \in Z$$

$$S_{n,m}(z) = \frac{(1 + p_o(n\omega_1 + m\omega_2))z - p_o^2(n\omega_1 + m\omega_2)}{(n\omega_1 + m\omega_2)z + 1 - p_o(n\omega_1 + m\omega_2)} \quad ,$$

also $\quad R_{S_{n,m}} = \frac{1}{|n\omega_1 + m\omega_2|} \quad .$

$$\sum_{\substack{n,m\in Z\\(n,m)\neq(0,0)}} \frac{1}{|n\omega_1 + m\omega_2|^\mu} \text{ konvergiert genau für } \mu > 2\ .^*$$

Betrachten wir nun alle $S \in G$ mit der Darstellung

$$(22) \qquad S = S_{n_k,m_k} A\, S_{n_{k-1},m_{k-1}} \cdots A\, S_{n_1,m_1} \qquad \text{mit}$$

$(n_j, m_j) \neq (0,0)$; $n_j, m_j \in Z$ für $j=1,\ldots,k$, so kann man ähnlich wie in Beispiel 2 nachweisen, daß $\sum (R_S)^\mu$ zu vorgegebenem μ für einen hinreichend kleinen Radius R_A (bei festgehaltenem Mittelpunkt von H_A) konvergiert, wobei die Summe über alle S mit der Darstellung (22) zu bilden ist. Dann folgt ähnlich wie in Beispiel 2 die Konvergenz von $\sum_{S\in G-\{I\}} (R_S)^\mu$.

* Siehe [18] S. 246 ff

Beispiel 4

Wir konstruieren wie in Beispiel 1 eine Fuchssche Gruppe G mit den drei hyperbolischen Erzeugenden S_1, S_2, S_3.
Die von S_i $(i=1,2,3)$ erzeugte Untergruppe bezeichnen wir mit G_i $(i=1,2,3)$ und zeigen zunächst, daß $\sum_{S\in G_i-\{I\}} (R_S)^\mu$ für jede positive Zahl μ konvergiert.

Aus $$R_{S_i^2} = \frac{R_{S_i} R_{S_i}}{|S_i(\infty)-S_i^{-1}(\infty)|} \leq \frac{R_{S_i}^2}{q_i}$$

$$R_{S_i^3} = \frac{R_{S_i} R_{S_i^2}}{|S_i(\infty)-S_i^{-2}(\infty)|} = \frac{R_{S_i}^3}{|S_i(\infty)-S_i^{-2}(\infty)|\,|S_i(\infty)-S_i^{-1}(\infty)|} \leq \frac{R_{S_i}^3}{q_i^2}$$

mit einer geeigneten positiven Konstanten q_i folgt induktiv

$$R_{S_i^n} \leq \frac{R_{S_i}^n}{q_i^{n-1}} = q_i\left(\frac{R_{S_i}}{q_i}\right)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und damit die Konvergenz von

$$\sum_{S\in G_i-\{I\}} (R_S)^\mu \leq 2q_i^\mu \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{R_{S_i}}{q_i}\right)^\mu\right]^n = 2q_i^\mu \frac{\left(\frac{R_{S_i}}{q_i}\right)^\mu}{1-\left(\frac{R_{S_i}}{q_i}\right)^\mu} \qquad (i=1,2,3)$$

falls R_{S_i} $(i=1,2,3)$ so klein gewählt wird, daß $q_i > R_{S_i}$ $(i=1,2,3)$ gilt.
Wir betrachten nun alle $S \in G$ mit der Darstellung

(23) $\quad S = S_1^{n_k} S_2^{l_{k-1}} S_1^{n_{k-1}} \ldots S_2^{l_2} S_1^{n_2} S_2^{l_1} S_1^{n_1}$ mit $n_j \neq 0$; $n_j \in \mathbb{Z}$ für $j=1,2,\ldots,k$; $l_i \neq 0$, $l_i \in \mathbb{Z}$ für $i=1,\ldots,k-1$.
Wieder gilt

$$R_S \leq \frac{R_{S_1^{n_k}} R_{S_2^{l_{k-1}}} \ldots R_{S_2^{l_1}} R_{S_1^{n_1}}}{q^{2(k-1)}} \qquad \text{mit einer}$$

geeigneten positiven Konstanten q. Summiert man über alle derartigen Elemente $S \in G$, so folgt

$$\sum (R_S)^\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2(k-1)\mu}} \left(\sum_{S\in G_1-\{I\}} (R_S)^\mu\right)^k \left(\sum_{S\in G_2-\{I\}} (R_S)^\mu\right)^{k-1} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} q^{\mu}\Bigl(\sum_{S\in G_1-\{I\}} \frac{(R_S)^{\mu}}{q^{\mu}}\Bigr)^k \cdot \Bigl(\sum_{S\in G_2-\{I\}} \frac{(R_S)^{\mu}}{q^{\mu}}\Bigr)^{k-1}$$

Wählen wir nun die Radien R_{S_i} $(i=1,2,3)$ der Ausgangskreise $H_{S_1}, H_{S_2}, H_{S_3}, H_{S_1^{-1}}, H_{S_2^{-1}}, H_{S_3^{-1}}$ hinreichend klein (die Mittelpunkte der Kreise bleiben unverändert, so daß man die Konstanten q, q_i beibehalten kann), so wird nach Obigem

$$\sum_{S\in G_i-\{I\}} \frac{(R_S)^{\mu}}{q_i^{\mu}} < 1 \quad \text{für } i=1,2,3 \quad .$$

Jedes Element aus der von S_1, S_2 erzeugten Untergruppe G_{S_1,S_2} läßt sich dann darstellen durch
$S_2^n S$ oder $S S_2^n$ oder $S_2^{n_1} S S_2^{n_2}$ oder S_2^n mit $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$,
wobei S ein Element mit der Darstellung (23) ist.
Ähnlich wie in den vorhergehenden Beispielen folgt, daß die Reihe $\sum_{S\in G_{S_1,S_2}-\{I\}} (R_S)^{\mu}$ konvergiert.
Wir betrachten nun alle Elemente $S \in G$, die sich durch

$$S = T_k S_3^{n_{k-1}} \ldots S_3^{n_2} T_2 S_3^{n_1} T_1 \qquad n_j \neq 0;\ n_j \in \mathbb{Z} \quad j=1,\ldots,k-1$$
$$T_l \in G_{S_1,S_2} - \{I\} \quad l=1,\ldots,k$$

darstellen lassen.
Da bei hinreichend kleinen Radien R_{S_i} $(i=1,2,3)$ $\sum_{S\in G_{S_1,S_2}-\{I\}} (R_S)^{\mu}$ beliebig klein wird, wie sich aus dem Obigen sofort ergibt, so lassen sich die obigen Betrachtungen hier wiederholen.
Es folgt schließlich, daß man zu vorgegebenem $\mu > 0$ eine Gruppe G obiger Art konstruieren kann, derart, daß

$$\sum_{S\in G-\{I\}} (R_S)^{\mu} \quad \text{konvergiert.}$$

Für die Untersuchungen des Kapitels II benötigen wir Gruppen vom Typ des Beispiels 2, deren zugehörige Hausdorff-Dimension beliebig dicht bei 1 liegt. Daß es der-

artige Gruppen gibt, wurde von A. F. Beardon bewiesen.*
Da der Beweis im Rahmen der bisherigen Untersuchungen liegt, wird er der Vollständigkeit halber in leicht modifizierter Form hier widergegeben.

Satz I 11

Zu jedem t mit $0 < t < 1$ gibt es eine Fuchssche Gruppe zweiter Art mit der singulären Menge Λ mit $d(\Lambda) \geq t$.

Der Beweis des Satzes erfolgt mit Hilfe mehrerer Lemmata. Zunächst werden spezielle Fuchssche Gruppen G zweiter Art definiert und anschließend jeweils eine spezielle Teilmenge der zugehörigen singulären Menge Λ untersucht.
Die beiden Transformationen P,E mit $P(z)= z+2(1+\varepsilon)$; $\varepsilon>0$; $E(z)= -\frac{1}{z}$ definieren eine Fuchssche Gruppe $G(\varepsilon)$ zweiter Art. Jedes Element aus $G(\varepsilon)$ bildet die obere Halbebene wieder auf sich ab. Die Transformation E ist elliptisch mit der Periode 2, ihr isometrischer Kreis ist der Einheitskreis. $G(\varepsilon)$ ist eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe, das Gebiet $F(\varepsilon) = \{x+iy \mid |x| < 1+\varepsilon;\ x^2+y^2 > 1\}$ ein Fundamentalgebiet dieser Gruppe.
Es sei nun

$$Q = \{z \mid |z| \leq 1\} \ ;\ V_n(z) = EP^n(z) \ ;\ V(n_1,..n_k)(z)=V_{n_1} \cdots V_{n_k}(z)$$

und $Q(n_1,\ldots,n_k) = V(n_1,\ldots,n_k)(Q)$ $\quad n,n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{Z}-\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$

Wegen $V_n(Q) \subset Q$ gilt für jede endliche Folge $n_1,\ldots,n_k$

$$Q \supset Q(n_1) \supset Q(n_1,n_2) \supset \ldots \supset Q(n_1, \ldots ,n_k)$$

Weiter erkennt man sofort, daß für den Fall $r \neq s$; $r,s \in \mathbb{Z}-\{0\}$

$$Q(n_1, \ldots,n_k,r) \cap Q(n_1, \ldots ,n_k,s) = \emptyset \text{ gilt.}$$

Ist G_K die Menge aller Elemente $V(n_1, \ldots ,n_k) \in G(\varepsilon)$, so betrachte man die Menge $\Lambda_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{V \in G_k} V(Q)$; $\Lambda_1 \subset Q$.

* Siehe [15]

Lemma I 2

Λ_1 ist eine Teilmenge der singulären Menge Λ_ε von $G(\varepsilon)$.

Beweis:

Wegen $V_n(z) = -\frac{1}{z+n\lambda}$ $\qquad \lambda = 2+2\varepsilon$

$$|V'_n(z)| = \frac{1}{|z+n\lambda|^2} \leq \frac{1}{|n\lambda| - |z|} \leq \frac{1}{|n|\cdot(2+2\varepsilon)-1} \leq \frac{1}{1+2\varepsilon}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ und $z \in Q$ folgt:

$$|Q(n_1,\ldots,n_k)| \leq (1+2\varepsilon)^{-1} |Q(n_2,\ldots,n_k)| \leq 2(1+2\varepsilon)^{-k} ,$$

wobei $|Q(n_1,\ldots,n_k)|$ allgemein den Durchmesser der Kreisscheibe $Q(n_1,\ldots,n_k)$ bezeichnet. Hieraus folgt

$|Q(n_1,\ldots,n_k)| \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$ und jede unendliche Folge $n_1, n_2, \ldots$.

Weiter folgt aus der obigen Konstruktion, daß für jedes $z \in \Lambda_1$ gilt:

$$\{z\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q(n_1,\ldots,n_k) \quad \text{für eine bestimmte}$$

Folge $n_1, n_2, \ldots$.

Wegen $V(n_1,\ldots,n_k)(\infty) \in Q(n_1,\ldots,n_{k-1}) \subset Q$ ist Λ_1 demnach Teilmenge von Λ_ε .

q.e.d.

Es sei nun Γ_1 eine Teilmenge von $G(\varepsilon)$ bestehend aus den Elementen

(A) $\qquad V_2, V_{-2}, \ldots, V_N, V_{-N} \qquad N \geq 2$

zusammen mit den Elementen $V(n_1,\ldots,n_k,m)$, wobei $n_1,\ldots,n_k,m$ eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllen.

(B) $\quad 1 \leq k \leq N, \quad n_1 = \ldots = n_k = 1 \quad$ und $\quad 2 \leq |m| \leq N$

(B) $\quad 1 \leq k \leq N, \quad n_1 = \ldots = n_k = -1 \quad$ und $\quad 2 \leq |m| \leq N$

(C) $\quad 1 \leq k \leq N, \quad n_1 = \ldots = n_k = 1 \quad$ und $\quad m = -1$

(C) $\quad 1 \leq k \leq N, \quad n_1 = \ldots = n_k = -1 \quad$ und $\quad m = 1$

Die Teilmenge $\Gamma_n \subset G(\varepsilon)$ wird dann induktiv bestimmt durch

$\Gamma_{n+1} = \{UV \mid U \in \Gamma_n \ , V \in \Gamma_1\} = \{U_1U_2\ldots U_{n+1} \mid U_i \in \Gamma_1 \ , \ i=1,..,n+1$

Man sieht aus der obigen Definition von Γ_1 sofort, daß $T_1(Q) \cap T_2(Q) = \emptyset$ gilt für $T_1 \neq T_2$; $T_1, T_2 \in \Gamma_1$; und damit

$VT_1(Q) \cap VT_2(Q) = \emptyset$ für $V \in \Gamma_n$.

Aus $T(Q) \subset Q$; $T \in \Gamma_1$; folgt $V(Q) \supset VT(Q)$ mit $T \in \Gamma_1$.

Weiter erkennt man sofort, daß die Menge $\Lambda_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{V \in \Gamma_k} V(Q)$

Teilmenge von $\Lambda_1 \subset \Lambda_\varepsilon$ ist.

Die Hausdorff-Dimension von Λ_2 ist nun Gegenstand näherer Untersuchungen. Zu diesem Zweck werden zunächst zwei vorbereitende Lemmata bewiesen.

<u>Lemma I 3</u>

Ist k eine natürliche Zahl mit $k > 1$ und sind $\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta, s$ positive Zahlen, die den Bedingungen

(24) $\quad 0 < \delta_j \leq \delta < 1; \ j=1,\ldots,k; \ 0 < s \leq \delta_1 + \ldots + \delta_k < 1$

genügen, so gilt:

$$\delta_1^{\Theta} + \ldots + \delta_k^{\Theta} \geq 1 \quad \text{mit} \quad \Theta = 1 - (1-s)(1-\delta)^{-1}$$

<u>Beweis:</u> Die Funktion $f(\mu) = \delta_1^{\mu} + \ldots + \delta_k^{\mu}$ ist als Funktion von μ im Intervall $[0,1]$ stetig und monoton fallend mit $f(0) = k > 1$, $f(1) < 1$.

Es gibt also eine eindeutige Zahl ν $\ 0 < \nu < 1$ mit

(25) $\quad \delta_1^{\nu} + \ldots + \delta_k^{\nu} = 1$.

Es folgt:

$$1 - \delta_j^{1-\nu} = \int_{\delta_j}^{1} d(x^{1-\nu}) = (1-\nu)\int_{\delta_j}^{1} x^{-\nu}\,dx \geq (1-\nu)(1-\delta_j) \geq$$

$$\geq (1-\nu)(1-\delta)$$

Hieraus folgt zusammen mit (24) und (25)

$$(1-s) \geq \sum_{j=1}^{k} \delta_j^{\nu}(1-\delta_j^{1-\nu}) \geq (1-\nu)(1-\delta)$$

also $\nu \geq 1 - \frac{1-s}{1-\sigma} = \Theta$ und damit $\sigma_1^\Theta + \ldots + \sigma_k^\Theta \geq 1$
aufgrund der Monotonieeigenschaft von f.
Ist $\Gamma \subset G(\varepsilon)$ die Vereinigungsmenge aller oben eingeführten Mengen Γ_k: $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, und $|I|$ die Intervallänge des Intervalls I, so gilt:

Lemma I 4
Ist $J = [-1;1]$, I ein beliebiges Teilintervall von J und $U \in \Gamma$, dann gilt:

$$\frac{1}{5}|I| \leq \frac{|U(I)|}{|U(J)|} \leq \frac{5}{4}|I|$$

Ist weiter $V \in \Gamma_1$, so folgt $|UV(J)| \leq \frac{5}{6}|U(J)|$

Beweis: Wegen $U \subset \Gamma$ gilt $U = U_1 \ldots U_k = V(n_1, \ldots, n_s, n_{s+1})$ mit $U_i \in \Gamma_1$ $(i=1,\ldots,k)$; $U_k = V(n_r, \ldots, n_{s+1})$ $(r \leq s+1)$.
Ist U_k vom Typ (A), so folgt $r=s+1$ und $|n_{s+1}| \geq 2$. Ist U_k vom Typ (B) oder (B'), so folgt $r \leq s$ und $|n_{s+1}| \geq 2$.
Ist schließlich U_k vom Typ (C) oder (C'), so folgt entweder $n_s=1$, $n_{s+1}=-1$ oder $n_s=-1$, $n_{s+1}=1$.
Für den Mittelpunkt w des isometrischen Kreises von U gilt dann

$$w = U^{-1}(\infty) = (EP^{n_1} \ldots EP^{n_{s+1}})^{-1}(\infty) = P^{-n_{s+1}}(EP^{-n_s} \ldots EP^{-n_1})(0) \in$$

$$\in P^{-n_{s+1}}(Q(-n_s, \ldots, -n_1))$$ und wegen

$$P^{-n_{s+1}}(Q(-n_s, \ldots, -n_1)) \subset P^{-n_{s+1}}(Q(-n_s)) \subset P^{-n_{s+1}}(Q)$$

(26) $$w \in P^{-n_{s+1}}(Q(-n_s)) \subset P^{-n_{s+1}}(Q) .$$

Ist U_k vom Typ (A),(B) oder (B'), so folgt mit Hilfe von (26) wegen $|n_{s+1}| \geq 2$ $|w| \geq 3$.
Ist U_k vom Typ (C) oder (C'), so gilt nach (26)

$$w \in P(Q(-1)) \cup P^{-1}(Q(1))$$

und damit $|w| \geq \lambda + (1+\lambda)^{-1} \geq \frac{7}{3}$ $(\lambda = 2+2\varepsilon;\ \varepsilon > 0)$
wie man sofort einsieht, wenn man beachtet, daß sich E aus einer Spiegelung am Einheitskreis und einer anschließenden Spiegelung an der imaginären Achse zusammensetzt.
In jedem Falle gilt also $|w| \geq \frac{7}{3}$. Ist nun $I = [\alpha, \beta]$ ein beliebiges Intervall aus J, so folgt:

$$\frac{|U(I)|}{|U(J)|} = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |U'(x)|\, dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^{1} |U'(x)|\, dx \right)^{-1} =$$

$$= \left(\int_{\alpha}^{\beta} |x-w|^{-2}\, dx \right) \left(\int_{-1}^{1} |x-w|^{-2}\, dx \right)^{-1} = \frac{1}{2} |I| \frac{(w+1)(w-1)}{(w-\beta)(w-\alpha)}$$

Ist $w \geq \frac{7}{3}$, so folgt wegen $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$

$$\frac{1}{2}|I| \frac{w-1}{w-\beta} \leq \frac{|U(I)|}{|U(J)|} \leq \frac{1}{2}|I| \frac{w+1}{w-\alpha}$$ und weiter

$$\frac{1}{2}|I| \frac{w-1}{w+1} \leq \frac{|U(I)|}{|U(J)|} \leq \frac{1}{2}|I| \frac{w+1}{w-1}$$

Da $\frac{w+1}{w-1}$ als Funktion von w monoton fällt, ergibt sich

(27) $$\frac{1}{5}|I| = \frac{1}{2}|I| \frac{2}{5} \leq \frac{|U(I)|}{|U(J)|} \leq \frac{1}{2}|I| \frac{5}{2} = \frac{5}{4}|I|$$

Ist $w \leq -\frac{7}{3}$, so erhält man durch eine ähnliche Uberlegung dieselbe Ungleichung.
Mit $V = V(n_1, \ldots, n_k) \in \Gamma_1$ gilt $V(J) \subset V(n_1)(J)$.
Aus $V(n_1)(Q) = E(P^{n_1}(Q))$ und $|n_1\lambda| \geq 2$ folgt sofort

$$|V(J)| \leq |V(n_1)(J)| = (n_1\lambda - 1)^{-1} - (n_1\lambda + 1)^{-1} = \frac{2}{(n_1\lambda)^2 - 1} \leq \frac{2}{3}$$

Setzt man in (27) für I V(J) ein, so erhält man

(28) $$|UV(J)| \leq \frac{5}{4}\,\frac{2}{3}|U(J)| = \frac{5}{6}\,|U(J)|$$

Damit ist Lemma I 4 vollständig bewiesen.

q.e.d.

Sind nun $V_1, \ldots, V_k$ die Elemente von Γ_1, so gilt

mit $\delta_j = \frac{|UV_j(J)|}{|U(J)|}$ $(j=1,\ldots,k)$

(29) $\delta_1 + \ldots + \delta_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{|UV_j(J)|}{|U(J)|} = \frac{1}{|U(J)|} \sum_{j=1}^{k} |UV_j(J)| < 1$

Mit $F = (-1;1) - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J)$ $(-1;1)$ - offenes Intervall
$J=[-1;1]$ -abgeschlossenes Intervall

gilt dann

$|U(J)| = m_1(U(F)) + \sum_{V\in\Gamma_1} |UV(J)|$, wobei $m_1(L)$ allgemein das lineare Maß der Menge L bezeichnet.

F ist die Vereinigung endlich vieler offener Intervalle.

Nach Lemma I 4 folgt dann

$$m_1(U(F)) \leq \frac{5}{4} m_1(F)\,|U(J)|$$

Mit (29) folgt weiter

$$\delta_1 + \ldots + \delta_k = \frac{1}{|U(J)|} (|U(J)| - m_1(U(F))) = 1 - \frac{m_1(U(F))}{|U(J)|} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{5}{4} m_1(F)$$

Aus (28) ergibt sich $\delta_j \leq \frac{5}{6}$

Wählen wir $s = 1 - \frac{5}{4} m_1(F)$, $\delta = \frac{5}{6}$, so sind die Voraussetzungen von Lemma I 3 erfüllt, falls $m_1(F)$ hinreichend klein wird.

Nach Lemma I 3 gilt dann

(30) $\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{UV(J)}{U(J)} \right|^{\Theta} \geq 1$ mit

$\Theta = 1 - \frac{15}{2} m_1(F) \geq 1 - 8\, m_1(F)$

Wir zeigen nun zunächst, daß aus der Ungleichung (30) für die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_\varepsilon)$ der singulären Menge Λ_ε von $G(\varepsilon)$ folgt $d(\Lambda_\varepsilon) \geq \Theta$.

Lemma I 5

Gilt $\sum_{V\in\Gamma_1} \left|\frac{UV(J)}{U(J)}\right|^{\Theta} \geq 1$ $(\Theta > 0)$, so folgt $d(\Lambda_\xi) \geq \Theta$.

Beweis: Zum Beweis stellen wir zunächst die gleichen Überlegungen wie im Beweis zu Satz I 4 an, wobei hier offenbar Kreisscheiben durch abgeschlossene Intervalle ersetzt werden können.

Aus Lemma I 4 folgt zunächst

$$C_1\,|U(J)| \leq |UV(J)| \leq C_2\,|U(J)|$$

mit $C_1 = \frac{1}{5}\min_{V\in\Gamma_1}|V(J)| > 0$ und $C_2 = \frac{5}{6}$

Ist nun $J_1, \ldots, J_l$ ein System abgeschlossener Intervalle, deren Durchmesser kleiner als $\min_{V\in\Gamma_1}|V(J)|$ sind, derart, daß jeder Punkt aus $\Lambda_2 \subset \Lambda_\xi$ innerer Punkt eines Intervalls J_{j_0} $j_0 \in \{1,\ldots,l\}$ ist, so kann man ähnlich wie im Beweis zu Satz I 4 jedes Intervall J_j durch Intervalle $U_1^j(J), \ldots, U_{n_j}^j(J)$; $U_m^j \in \Gamma$; $m=1,\ldots,n_j$; $j=1,\ldots,l$; ($\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$) mit folgenden Eigenschaften ersetzen:

a) $U_{i_1}^j(J) \cap U_{i_2}^j(J) = \emptyset$ für $i_1 \neq i_2$; $i_1, i_2 \in \{1,\ldots,n_j\}$.

b) Jeder Punkt aus $\Lambda_2 \cap J_j$ liegt im Innern eines Intervalls $U_i^j(J)$ und es gilt $\Lambda_2 \cap U_i^j(J) \neq \emptyset$ für alle $i=1,2,\ldots,n_j$.

c) Für jedes Intervall $U_i^j(J)$ $(i=1,\ldots,n_j)$ gilt $|U_i^j(J)| > |J_j|$ und zu jedem $U_i^j(J)$ gibt es ein $V \in \Gamma_1$ derart, daß $|U_i^jV(J)| \leq |J_j|$ gilt.

Da n_j durch eine Konstante K $(K \geq 3)$, die unabhängig von j und der Überdeckung $J_1,\ldots,J_l$ ist, nach oben beschränkt wird, so folgt $M'_\eta(\Lambda_2) \leq K_0 M_\eta(\Lambda_2)$ $(\eta > 0)$ mit einer geeigneten Konstanten K_0, wobei hier $M'_\eta(\Lambda_2)$ die sinngemäß übertragene Bedeutung hat.

Gilt nun die Ungleichung (30), so kann man die gleichen Überlegungen wie im Beweis zu Satz I 5 anstellen. Sie führen unmittelbar zu $M'_\Theta(\Lambda_2) > 0$ und damit zu $M_\Theta(\Lambda_2) > 0$. Es gilt also $d(\Lambda_2) \geq \Theta$.

q.e.d.

Die Aussage des Satzes I 10 ist nach (30) und Lemma I 5 bewiesen, wenn man nachweisen kann, daß $m_1(F)$ mit hinreichend großem N und kleinem ε beliebig dicht bei 0 liegt, daß also $\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{N\to\infty} m_1(F) = 0$ ist.

Es sei $T = I - \bigcup_{|n|=1}^{N} V(n)(J)$, $I=(-1;1)$,

$u_n=1$ und $v_n=-1$ für jede natürliche Zahl n.

Dann gilt:

$$(31)\quad F-T = \bigcup_{|n|=1}^{N} V(n)(J) - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J) = \bigcup_{n=-1,1} V(n)(J) - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J)$$
$$= [F\cap V(1)(J)] \cup [F\cap V(-1)(J)]$$

Nach der Definition von Γ_1 folgt mit $1\leq r\leq N$ weiter

$$[F\cap V(u_1,\dots,u_r)(J)] - V(u_1,\dots,u_r)(T) =$$
$$= V(u_1,\dots,u_r)(J) - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J) - V(u_1,\dots,u_r)(T) =$$
$$= V(u_1,\dots,u_r)(J-T) - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J) =$$
$$= [V(u_1,\dots,u_r)(\bigcup_{|n|=1}^{N} V(n)(J)) \cup V(u_1,\dots,u_r)(\{-1;1\})] - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J) =$$
$$= [V(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})(J) \cup V(u_1,\dots,u_r)(\{-1;1\})] - \bigcup_{V\in\Gamma_1} V(J) =$$
$$= [V(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})(J) \cap F] \cup V(u_1,\dots,u_r)(\{-1;1\})$$

Hieraus folgt sofort

$$m_1(F\cap V(u_1,\dots,u_r)(J)) \leq m_1(V(u_1,\dots,u_r)(T)) +$$
$$+ m_1(V(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})(J)) \cap F$$

Wie man unmittelbar einsieht, gilt eine derartige Ungleichung auch für den Fall, daß $u_1,\dots,u_r$ durch $v_1,\dots,v_r$ ($v_i=-1$; $i=1,\dots,r$) ersetzt werden.

Damit folgt mit Hilfe der Darstellung (31) durch mehrmalige Anwendung der obigen Ungleichung

$$m_1(F) \leq m_1(T) + \sum_{r=1}^{N} m_1(V(u_1,\ldots,u_r)(T)) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{N} m_1(V(v_1,\ldots,v_r(T) + m_1(V(u_1,\ldots,u_{N+1})(J) +$$
$$+ m_1(V(v_1,\ldots,v_{N+1})(J)) ,$$

da allgemein für jede meßbare Menge K mit $K \subset J$ gilt: $m_1(F \cap K) \leq m_1(K)$.

Aus Symmetriegründen (T,J sind symmetrisch in bezug auf die imaginäre Achse) ist

$m_1(V(u_1,\ldots,u_r)(L)) = m_1(V(v_1,\ldots,v_r)(L))$, falls L=T oder L=J gilt.

Es folgt also

$$(32) \quad m_1(F) \leq m_1(T) + 2 \sum_{r=1}^{N} m_1(V(u_1,\ldots,u_r)(T)) + + 2\, m_1(V(u_1,\ldots,u_{N+1})(J))$$

Jeder Summand auf der rechten Seite der Ungleichung wird nun einzeln abgeschätzt.

Die Menge $T-\{0\}$ erhält man durch Spiegelung aller Intervalle $[\lambda r+1; \lambda(r+1)-1]$; $r=-N,\ldots,N-1$; zusammen mit den Halbstrahlen $(-\infty;-(N\lambda+1))$, $(N\lambda+1,+\infty)$ am Einheitskreis ($\lambda=2+2\varepsilon$).

Hieraus folgt

$$(33) \quad m_1(T) = \frac{2}{N\lambda+1} + 2\sum_{r=0}^{N-1}\left[\frac{1}{\lambda r+1} - \frac{1}{\lambda(r+1)-1}\right] \leq$$
$$\leq \frac{1}{N} + \frac{4\varepsilon}{\lambda-1} + 2\sum_{r=1}^{N-1}\frac{2\varepsilon}{(\lambda r)^2} < \frac{1}{N} + 8\varepsilon ,$$

da $\lambda > 2$ und $\frac{1}{\lambda^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\pi^2}{6} < 1$ gilt.*

Ist $V(u_1,\ldots,u_r)(z) = \frac{a_r z+b_r}{c_r z+d_r}$; $a_r d_r - b_r c_r = 1$;

so liegt der Pol $[V(u_1,\ldots,u_r)]^{-1}(\infty) = -\frac{d_r}{c_r}$ in $P^{-1}(Q)$,

also ist $|d_r| > |c_r|$. Damit folgt wegen $|z| \leq 1$ für $z \in T$:

* Siehe [18] S. 223

$$(34)\quad m_1(V(u_1,\dots,u_r)(T)) = \int_T |V'(u_1,\dots,u_r)(z)|\,|dz| =$$

$$= \int_T \frac{1}{|c_r z+d_r|^2}\,|dz| \leq m_1(T)\,\frac{1}{(|d_r|-|c_r|)^2} .$$

Zur weiteren Abschätzung benötigt man nähere Angaben über d_r und c_r.
Wegen $V(u_1,\dots,u_r) = (EP)^r$ gilt
$V(u_1,\dots,u_{r+1}) = V(u_1,\dots,u_r)EP$ und damit

$$\begin{pmatrix} a_{r+1} & b_{r+1} \\ c_{r+1} & d_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt weiter $c_{r+1}=d_r$ und $d_{r+1}=\lambda d_r-c_r$ mit $c_1=1$, $d_1=\lambda$. c_r und d_r lassen sich nun schreiben als

$$(35)\quad c_r = \frac{p^r-q^r}{p-q} \quad , \quad d_r = \frac{p^{r+1}-q^{r+1}}{p-q} \quad ,$$

wobei p und q die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2-\lambda x+1=0$ sind, das heißt: $p+q=\lambda$, $pq=1$.
Dies sieht man unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß für r=1 die Gleichungen (35) sicherlich gültig sind und die auf den rechten Seiten der Gleichungen stehenden Ausdrücke den obigen Rekursionsgleichungen genügen.
Setzen wir $p = \frac{1}{2}(\lambda + (\lambda^2-4)^{\frac{1}{2}})$ und $q = \frac{1}{2}(\lambda - (\lambda^2-4)^{\frac{1}{2}})$ so gilt $p>q>0$ und damit

$$(36)\quad (p-q)(|d_r|-|c_r|) = p^r(p-1) + q^r(1-q) \geq p^r(p-1),$$

denn aus $pq=1$ und $p>q>0$ folgt $0<q<1$, $p>1$.
Hiermit ergibt sich weiter

$$\sum_{r=1}^{N} (|d_r|-|c_r|)^{-2} \leq \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^2\cdot p^{-2r} = \left(\frac{p-q}{p-1}\right)^2 (p^2-1)^{-1}$$

Setzt man $\mu = \frac{1}{2}(\lambda^2-4)^{\frac{1}{2}} \geq (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, so ist $p=1+\varepsilon+\mu$, $q=1+\varepsilon-\mu$ und es gilt:

$$\sum_{r=1}^{N} (|d_r| - |c_r|)^{-2} \leq \frac{4\mu^2}{(\varepsilon+\mu)^3(2+\varepsilon+\mu)} \leq \frac{\lambda^2-4}{2\mu^3} \leq$$

$$\leq \frac{4\varepsilon+2\varepsilon^2}{(2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{3}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$$

für $0 < \varepsilon < 1$.

Mit Hilfe der Ungleichung (34) folgt damit

$$(37) \qquad \sum_{r=1}^{N} m_1(V(u_1,\ldots,u_r)(T)) \leq \frac{3}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\, m_1(T)\ .$$

Die Ungleichung (34) bleibt gültig, wenn man T durch J ersetzt.

Aus (36) folgt dann

$$(38) \qquad m_1(V(u_1,\ldots,u_{N+1})(J)) \leq \left(\frac{p-q}{p-1}\right)^2 \cdot p^{-2(N+1)}\, m_1(J)\ .$$

Schließlich gewinnt man aus (32),(33),(37) und (38)

$$m_1(F) \leq m_1(T)\left[1+6\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right] + 4\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^2 p^{-2(N+1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{N} + 8\varepsilon\right)(1+6\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) + 4\cdot\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^2 \cdot p^{-2(N+1)}$$

Da p ($p>1$) und q nur von ε abhängen, ergibt sich damit

$$\limsup_{N\geq 2} m_1(F) \leq 8\varepsilon + 48\sqrt{\varepsilon}\ , \text{ also } \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\geq 2} m_1(F) = 0\ .$$

Damit ist nachgewiesen, daß zu vorgegebenem t ($0 \leq t < 1$) bei hinreichend großem N und kleinem ε für die singuläre Menge Λ_ε gilt $d(\Lambda_\varepsilon) > t$.

Bildet die lineare Transformation A die obere Halbebene auf den Einheitskreis ab, so gilt, da $A'(z)$ in einer Umgebung von J beschränkt ist ($\Lambda_2 \subset J$), $d(\Lambda_2) = d(\Lambda_2')$, wobei $\Lambda_2' = A(\Lambda_2)$ in der singulären Menge der Gruppe $G'(\varepsilon) = AG(\varepsilon)A^{-1}$ liegt.

Damit ist der im wesentlichen nach A. F. Beardon geführte

Beweis des Satzes I 11 abgeschlossen.

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir noch nachweisen, daß man $G'(\mathcal{E})$ als Gruppe vom Typ des Beispiels 2 voraussetzen darf.

Wählt man für A die Transformation $A(z) = \frac{z-2i}{z+2i}$, so werden die Geraden $x=-\frac{\lambda}{2}$ und $x=+\frac{\lambda}{2}$ $(z=x+iy)$ auf die isometrischen Kreise von APA^{-1} bzw. $AP^{-1}A^{-1}$ abgebildet und der Einheitskreis (isometrischer Kreis von E) auf den isometrischen Kreis von AEA^{-1}, denn mit

$z' = A(z)$, $A'(z) = \frac{4i}{(z+2i)^2}$ folgt

$(APA^{-1})'(z') = \frac{(z+2i)^2}{(P(z)+2i)^2}$ also

$|(APA^{-1})'(z')| = 1$ für $z= -\frac{\lambda}{2} +iy$.

Ebenso gilt $|(AP^{-1}A^{-1})'(z')| = 1$ für $z= \frac{\lambda}{2} + iy$.

Schließlich ist

$$(AEA^{-1})'(z') = \frac{(z+2i)^2}{4i} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{4i}{(E(z)+2i)^2} = \frac{(z+2i)^2}{z^2(-\frac{1}{z}+2i)^2}$$

Für $|z| = 1$ folgt also $|(AEA^{-1})'(z')| = 1$.

Kapitel II

Mit Hilfe der in Kapitel I gewonnenen Ergebnisse sind wir nun in der Lage, den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen. Er besagt, daß man zu jedem t mit $0 \leq t \leq 1$ eine Fuchssche Gruppe finden kann, deren singuläre Menge die Hausdorff-Dimension t hat. Dabei leisten uns die quasikonformen Abbildungen wertvolle Dienste. Der wesentliche dem Beweis zugrundeliegende Gedankengang ist folgender: Man bestimmt zunächst zwei Fuchssche Gruppen G_0, G_1, deren zugehörige Hausdorff-Dimensionen hinreichend dicht bei 0 bzw. 1 liegen und die durch eine quasikonforme Deformation auseinander hervorgehen, das heißt $G_1 = wG_0w^{-1}$ für eine quasikonforme Abbildung w. Danach führt man über die komplexe Dilatation einen Parameter t $(0 \leq t \leq 1)$ ein und erhält mit Hilfe des Existenssatzes für quasikonforme Abbildungen zu jedem t eine Gruppe G(t) mit der Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_t)$. Der Beweis wird abgeschlossen durch den Nachweis der Stetigkeit der Funktion $t \rightarrow d(\Lambda_t)$.
Dies wiederum gelingt mit Hilfe eines für quasikonforme Abbildungen geltenden Verzerrungssatzes.
Wir werden allerdings den hier skizzierten Beweis in zwei Etappen führen, da uns nicht unmittelbar zwei Gruppen G_0, G_1 mit den obigen Voraussetzungen bekannt sind.
Dazu wählen wir zunächst G_0, G_1 $(G_1 = wG_0w^{-1})$ mit den singulären Mengen Λ_0 und Λ_1 derart, daß $d(\Lambda_0)$ hinreichend dicht bei 0 liegt und $d(\Lambda_1) > \frac{1}{2}$ gilt.
Im zweiten Teil wählen wir G_0, G_1 so, daß $d(\Lambda_0)$ bzw. $d(\Lambda_1)$ hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ bzw. 1 liegt.
Dem Beweis wollen wir zunächst einige einführende Erläuterungen über quasikonforme Abbildungen voranstellen.

1) Quasikonforme Abbildungen*1

Wir erläutern zunächst einige für das Folgende wichtige Begriffe.

Eine stetige komplexwertige Funktion f ist absolut stetig auf der Strecke $I \subset C$ (C-endliche komplexe Zahlenebene) genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart, daß $\sum_{I} |f(b_i)-f(a_i)| < \varepsilon$ ist für jede endliche Folge von punktfremden Teilstrecken (offen) $\overline{a_i, b_i}$ die samt ihren Endpunkten a_i, b_i in I liegen und eine Gesamtlänge besitzen, die kleiner als δ ist.

Eine in einem Gebiet G der endlichen Ebene stetige Funktion f ist absolut stetig auf Geraden in G genau dann, wenn die folgende Bedingung gilt:

In jedem Rechteck $R = \{x+iy \mid a < x < b,\ c < y < d\}$ mit $\overline{R} = R \cup \mathrm{Rd}\, R \subset G$ (Rd R - Rand von R) ist f für fast alle y mit $c < y < d$ absolut stetig als Funktion von x auf den Strecken $J_y = \{x+iy \mid a < x < b\}$ und für fast alle x mit $a < x < b$ absolut stetig als Funktion von y auf den Strecken $J_x = \{x+iy \mid c < y < d\}$.

Aus der absoluten Stetigkeit auf Geraden folgt für eine stetige Funktion die Existenz der partiellen Ableitungen fast überall (das heißt: mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß 0) im Gebiete G.*

Eine quasikonforme Abbildung läßt sich nun folgendermaßen definieren:

Definition II 1

Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus w des Gebiets G ($G \subset \hat{C}$; $\hat{C}$-abgeschlossene komplexe Zahlenebene) ist eine K-quasikonforme Abbildung ($K \geq 1$) genau dann, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

1) w ist absolut stetig auf Geraden in $G - \{\infty\} - \{w^{-1}(\infty)\}$.

2) Die Dilatationsbedingung

$$\max_{\alpha} |\partial_{\alpha} w(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_{\alpha} w(z)|$$

*1 Siehe [21]

* Siehe [21] S. 133

gilt fast überall in $G-\{\infty\}-\{w^{-1}(\infty)\}$.

Für eine K-quasikonforme Abbildung w existieren also fast überall die Richtungsableitungen

$$\partial_\alpha w(z) = \lim_{r\to 0} \frac{w(z_0+r\, e^{i\alpha})-w(z_0)}{r\, e^{i\alpha}} ,$$

außerdem ist w fast überall in G differenzierbar, das heißt:

Für fast alle Punkte $(x_0,y_0)\in G$ gilt

$w(x,y) = w(x_0,y_0) + w_x(x-x_0) + w_y(y-y_0) + h(z)(z-z_0)$

mit $z=x+iy \in G$, $\lim_{z\to z_0} h(z)=0$

(w_x, w_y -partielle Ableitungen von w nach x bzw. y)

Für das Maximum bzw. Minimum der Beträge der Richtungsableitungen von w in z gilt:

$$\max_\alpha |\partial_\alpha w(z)| = |w_z(z)| + |w_{\bar z}(z)|$$

$$\min_\alpha |\partial_\alpha w(z)| = |w_z(z)| - |w_z(z)|$$

mit $w_z(z) = \frac{1}{2}(w_x+ \frac{1}{i}\, w_y)$, $w_{\bar z}(z) = \frac{1}{2}(w_x- \frac{1}{i}\, w_y)$

und $|w_z(z)| > 0$ fast überall in G.

Der Quotient $D_z= \dfrac{\max_\alpha |\partial_\alpha w(z)|}{\min_\alpha |\partial_\alpha w(z)|}$ heißt der Dilatationsquotient oder kurz die Dilatation an der Stelle z.

Die komplexe Dilatation $\mu(z)$ wird durch die Gleichung

$w_{\bar z}(z)=\mu(z)\, w_z(z)$ definiert.

Zwischen D_z und $\mu(z)$ besteht folgender Zusammenhang:

$$D_z = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

Ist die Abbildung w 1-quasikonform, so ist sie konform.*

* Siehe [21] S. 30

Um im folgenden nähere Aussagen über die Existenz geeigneter quasikonformer Abbildungen machen zu können, benutzen wir quasisymmetrische Funktionen.*

Eine auf einem beschränkten oder nicht beschränkten Intervall I der endlichen x-Achse definierte stetige reellwertige und echt zunehmende Funktion φ heißt k-quasisymmetrisch ($k \geq 1$) genau dann, wenn

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)} \leq k \qquad \text{für alle } x,t$$

mit $x, x-t, x+t \in I$, $t > 0$ gilt.

Eine auf der gesamten x-Achse definierte reellwertige Funktion φ ist dann und nur dann quasisymmetrisch, wenn es eine quasikonforme Abbildung der oberen Halbebene auf sich gibt, die auf der reellen Achse die Randwerte $\varphi(x)$ annimmt.*1

2) Die Existenz endlich erzeugter Fuchsscher Gruppen G mit vorgegebener Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$

Nach der knappen Vorbereitung unter 1) beginnen wir nun mit dem Beweis des angekündigten Satzes.

Zunächst beweisen wir

Lemma II 1

Die Funktion
$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha x+\beta \quad (\alpha > 0, \alpha \neq 1) & \text{für } x \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \\ x & \text{für } x < \frac{\beta}{1-\alpha} \end{cases}$$

ist quasisymmetrisch auf der reellen Zahlengeraden.

Beweis: φ ist zunächst echt zunehmend.

Ist $x, x+t, x-t \geq -\frac{\beta}{\alpha-1}$ bzw. $x, x+t, x-t < -\frac{\beta}{\alpha-1}$,

so gilt $\varphi(x+t)-\varphi(x) = \varphi(x)-\varphi(x-t)$

* Siehe [21] S. 91 ff

*1 Siehe [21] S. 86

Ist $x \geq \frac{\beta}{1-\alpha}$, $x-t < \frac{\beta}{1-\alpha}$, so folgt

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)} = \frac{\alpha t}{\alpha x-(x-t)+\beta} = \frac{\alpha t}{(\alpha-1)x+t+\beta}$$

Für $\alpha > 1$ ergibt sich aus den obigen Voraussetzungen
$(\alpha-1)x+\beta \geq 0$; $(\alpha-1)x+\beta+t < \alpha t$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{1}{\alpha} < 1 \leq \frac{\alpha t}{(\alpha-1)x+t+\beta} \leq \alpha$$

Für $\alpha < 1$ erhält man
$(\alpha-1)x+\beta \leq 0$ und $(\alpha-1)x+\beta+t > \alpha t > 0$ also

$$\alpha \leq \frac{\alpha t}{(\alpha-1)x+t+\beta} \leq 1 < \frac{1}{\alpha}$$

Ist schließlich $x < \frac{\beta}{1-\alpha}$, $x+t \geq \frac{\beta}{1-\alpha}$, so gilt

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)} = \frac{(\alpha-1)x+\alpha t+\beta}{t}$$

Für $\alpha > 1$ folgt
$(\alpha-1)x+\beta < 0$ und $(\alpha-1)x+\alpha t+\beta \geq t$ und damit

$$\frac{1}{\alpha} < 1 \leq \frac{(\alpha-1)x+\alpha t+\beta}{t} \leq \alpha$$

Für $\alpha < 1$ gilt
$(\alpha-1)x+\beta > 0$ und $(\alpha-1)x+\alpha t+\beta \leq t$,

$$\alpha < \frac{(\alpha-1)x+\alpha t+\beta}{t} \leq 1 < \frac{1}{\alpha}$$

Die Funktion φ ist demnach für $\alpha > 1$ α-quasisymmetrisch für $\alpha < 1$ hingegen $\frac{1}{\alpha}$-quasisymmetrisch.

q.e.d.

Es seien nun G_1 eine Gruppe, wie sie in Beispiel 1 des Kapitels I angegeben wurde mit der singulären Menge Λ_1 und der zugehörigen Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_1) > \frac{1}{2}$ und G_0 eine Gruppe nach Beispiel ' derart, daß die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_0)$ der singulären Menge Λ_0 hinreichend dicht bei 0 liegt.
Durchlaufen wir vom Punkte 1 aus in positiver Richtung den Einheitskreis, so treffen wir nacheinander die isometrischen Kreise $H_{S_1}, H_{S_2}, H_{S_3}$ bzw. $H_{T_1}, H_{T_2}, H_{T_3}$ der hyperbolischen Erzeugenden S_1, S_2, S_3 von G_0 bzw. T_1, T_2, T_3 von G_1. Durch die Zuordnung $S_i \longrightarrow T_i$ (i=1,2,3) wird ein natürlicher Isomorphismus ψ von G_0 auf G_1 bestimmt.
Bezeichnen wir wiederum allgemein mit D_S die vom isometrischen Kreis der Transformation S berandete abgeschlossene Kreisscheibe, so ist

$$F_0 = \bigcap_{i=1}^{3} C(D_{S_i} \cup D_{S_i^{-1}}) \quad \text{bzw.} \quad F_1 = \bigcap_{i=1}^{3} C(D_{T_i} \cup D_{T_i^{-1}})$$

ein Fundamentalgebiet der Gruppe G_0 bzw. G_1.
(CD- Komplement von D in bezug auf die abgeschlossene Ebene $\hat{C}$).
Es seien nun B_i (i=0,1) der Durchschnitt von F_i mit dem Einheitskreis $|z|<1$ und B_i' der Durchschnitt von B_i mit der oberen Halbebene.
Nach Konstruktion von G_i (i=0,1) gilt:

$B_i = B_i' \cup B_i'' \cup [-1;1]$, wobei sich B_i'' durch Spiegelung von B_i' an der reellen Achse ergibt. B_i' ist einfach zusammenhängend und wird von der Strecke [-1;1] und sieben weiteren Kreisbögen berandet. Wir bezeichnen von 1 ausgehend in positiver Richtung auf dem Einheitskreis fortlaufend die Eckpunkte dieses Polygons mit $p_0^i, p_1^i, \ldots, p_7^i$

$$p_0^i = 1, \quad p_7^i = -1 \qquad (i=0,1)$$

Wir bilden nun B_i' durch eine konforme Abbildung h_i auf die obere Halbebene H ab. Die Abbildung h_i läßt sich ein-

eindeutig und stetig auf den Rand $\partial B_i'$ von B_i' fortsetzen, derart, daß $\partial B_i'$ auf $R \cup \{\infty\}$ (R-reelle Zahlengerade) abgebildet wird. Wir normieren h_i so, daß $h_i(p_0^i) = \infty$, $h_i(p_1^i) = -1$ und $h_i(p_2^i) = 0$ für i=0,1 gilt.

Allgemein sei $q_k^i = h_i(p_k^i)$ $\quad k=0,\dots,7$; $i=0,1$.

Wir betrachten nun die auf der reellen Achse R definierte reellwertige Funktion l_1 mit

$$l_1(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \alpha_1 x \quad \text{mit } \alpha_1 q_3^0 = q_3^1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

l_1 ist nach Lemma II 1 quasisymmetrisch. Es gibt also eine quasikonforme Abbildung w_1 der oberen Halbebene auf sich, die auf R die Randwerte $l_1(x)$ annimmt.

Die Punkte $q_0^0,\dots,q_7^0$ werden durch l_1 auf die Punkte

$q_0^1 = q_0^0$, $q_1^1 = q_1^0$, $q_2^1 = q_2^0$, q_3^1, $l_1(q_4^0)$, ... ,$l_1(q_7^0)$

abgebildet.

Wir definieren nun $l_2(x)$ für $x \in R$ durch

$$l_2(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < q_3^1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \quad \text{mit } \alpha_2 q_3^1 + \beta_2 = q_3^1, \alpha_2(l_1(q_4^0)) + \beta_2 = q_4^1 & \text{für } x \geq q_3^1 \end{cases}$$

Nach Lemma II 1 gibt es eine quasikonforme Abbildung w_2 der oberen Halbebene auf sich, die auf R die Randwerte $l_2(x)$ annimmt. So fortfahrend können wir weitere entsprechende quasisymmetrische Funktionen l_3, l_4, l_5 definieren mit $l_5 \circ l_4 \circ l_3 \circ l_2 \circ l_1(q_7^0) = q_7^1$ und dazu entsprechende quasikonforme Abbildungen w_3, w_4, w_5 finden. Da eine Hintereinanderschaltung quasikonformer Abbildungen wieder eine quasikonforme Abbildung ergibt, ist $w^* = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ eine quasikonforme Abbildung der in $\hat{C}$ abgeschlossenen oberen Halbebene auf sich mit $w^*(q_k^0) = q_k^1$ (k=0,...,7).

Die Abbildung $h_1^{-1} w^* h_0 = w$ ist wiederum eine quasikonforme

Abbildung, die B_0' auf B_1' abbildet, derart, daß deren eineindeutige und stetige Fortsetzung auf $\partial B_0'$ $\partial B_0'$ auf $\partial B_1'$ abbildet, wobei die Eckpunkte von $\partial B_0'$ in entsprechende Eckpunkte von $\partial B_1'$ übergehen.

Genauer gilt $w(\widehat{q_k^0, q_{k+1}^0}) = \widehat{q_k^1, q_{k+1}^1}$ für $k=0,..,6$

($\widehat{q_k^i, q_{k+1}^i}$ - Randbogen von B_i mit dem Anfangspunkt q_k^i und dem Endpunkt q_{k+1}^i), $w([-1;1]) = [-1;1]$, wenn wir die auf $\partial B_0'$ fortgesetzte Abbildung wieder mit w bezeichnen.

Nach dem Spiegelungsprinzip, daß ebenfalls für quasikonforme Abbildungen gilt, kann man w auf ganz $B_0 = B_0' \cup B_0'' \cup [-1;1]$ fortsetzen. Die derart auf ganz B_0 fortgesetzte Abbildung, die wir wieder mit w bezeichnen wollen, ist dann quasikonform auf ganz B_0 .*1

Nach obiger Konstruktion haben wir somit eine quasikonforme Abbildung w gewonnen, die auf $B_0 \cup \partial B_0$ homöomorph ist, derart, daß unter G_0 äquivalente Punkte von ∂B_0 auf unter G_1 äquivalente Punkte von ∂B_1 abgebildet werden.

Wir setzen nun die Abbildung w durch die Festsetzung

$$w(S(z)) = T(w(z)) \quad \text{für } z \in B_0 \cup \partial B_0 , \quad T = \Psi(S) , \; S \in G_0$$

auf den ganzen Einheitskreis ($|z| < 1$) fort.

Die so gewonnene Abbildung, die wir wiederum mit w bezeichnen, ist homöomorph auf dem ganzen Einheitskreis U und nach Konstruktion quasikonform auf $U - \bigcup_{\substack{S \in G_0 \\ i=1,2,3}} S(H_{S_i} \cap U)$.

Ist nun c ein abgeschlossener analytischer Bogen, der mit möglicher Ausnahme seiner Endpunkte in einem Gebiet B liegt, so gilt für die maximale Dilatation K(B) einer auf B homöomorphen Abbildung w : K(B)=K(B-c) (K(B-c)-maximale Dilatation von B-c).*2

Hieraus folgt nun, daß die oben konstruierte Abbildung w quasikonform auf dem gesamten Einheitskreis ($|z| < 1$) ist und es gilt: $wSw^{-1} = T = \Psi(S)$.

*1 Siehe [21] S. 49

*2 Siehe [21] S. 47 und [3]

Die Gruppe G_1 ist somit eine quasikonforme Deformation von G_0 $G_1 = wG_0w^{-1}$.
Nach dem für quasikonforme Abbildungen gültigen Satz über die Ränderzuordnung können wir w auffassen als eine homöomorphe Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises ($|z| \leq 1$) auf sich. Mit Hilfe einer eventuell nachgeschalteten linearen Transformation A können wir weiter w durch $w(0)=0$ und $w(1)=1$ normieren. Hierdurch tritt allerdings an die Stelle von G_1 die zu G_1 konjugierte Gruppe $G_1' = AG_1A^{-1}$. Wie man unmittelbar einsieht, bildet dabei A die singuläre Menge Λ_1 auf die singuläre Menge von AG_1A^{-1} ab. Die Hausdorff-Dimension der singulären Menge ändert sich also bei diesem Übergang nicht.
Die Abbildung w mit der obigen Normierung kann man nach dem Spiegelungsprinzip auf die ganze endliche Ebene fortsetzen. Man darf im folgenden also voraussetzen, daß w mit der obigen Normierung eine quasikonforme Abbildung der endlichen Ebene auf sich ist, die den Einheitskreis ($|z| \leq 1$) auf sich abbildet und daß $G_1' = wG_0w^{-1}$ gilt.
Aus $Tw = wS$ für $S \in G_0$, $T \in G_1'$, $T = wSw^{-1}$

folgt, da sich die partiellen Ableitungen $f_z, f_{\bar{z}}$ einer durch Hintereinanderschaltung quasikonformer Abbildungen entstandenen quasikonformen Abbildung f nach den gewöhnlichen Regeln bestimmen lassen:

$$\begin{pmatrix} T'(w(z)) & 0 \\ 0 & \overline{T'(w(z))} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_z(z) & w_{\bar{z}}(z) \\ \bar{w}_z(z) & \bar{w}_{\bar{z}}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_z(S(z)) & w_{\bar{z}}(S(z)) \\ \bar{w}_z(S(z)) & \bar{w}_{\bar{z}}(S(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'(z) & 0 \\ 0 & \overline{S'(z)} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung erkennt man sofort, daß die komplexe Dilatation $\mu(z)$ von w einer Beltrami Gleichung

$$\mu(S(z)) \frac{\overline{S'(z)}}{S'(z)} = \mu(z) \qquad (39)$$

genügt.

Die komplexe Dilatation μ ist eine meßbare Funktion

(im Lebesgueschen Sinne) und es gilt $|\mu(z)| \leq k < 1$ für fast alle $z \in C$ (C-endliche komplexe Zahlenebene).*1
Wir führen nun einen Parameter t ; $0 \leq t \leq 1$; ein und bestimmen zu jedem t mit $0 \leq t \leq 1$ die Funktion $\mu_t(z) = t\,\mu(z)$. μ_t ist meßbar und es gilt für fast alle $z \in C$
$|\mu_t(z)| \leq k$.
Nach dem Existenzsatz*2 gibt es eine quasikonforme Abbildung w_t der endlichen Ebene, deren komplexe Dilatation fast überall in C mit μ_t identisch ist. Da ein isolierter Randpunkt eines Gebiets eine hebbare Singularität jeder quasikonformen Abbildung dieses Gebiets ist,*3 kann man w_t als quasikonforme Abbildung der abgeschlossenen komplexen Zahlenebene $\hat{C}$ auffassen, die aus topologischen Gründen ($w_t(\hat{C})$ ist offen und abgeschlossen)* $\hat{C}$ auf sich abbilden muß. Der Einheitskreis U wird also durch w_t auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet (Der Zusammenhangsgrad ist eine topologische Invariante) $w_t(U)$ mit mehr als einem Randpunkt abgebildet, das sich nach dem Riemannschen Abbildungssatz konform auf U abbilden läßt.
Durch eventuelle Nachschaltung einer linearen Transformation kann man erreichen, daß 0 und 1 Fixpunkte der zusammengesetzten Abbildung sind. Durch eine derartige Hintereinanderschaltung ändert sich die komplexe Dilatation nicht. Wir können also w_t auffassen als eine quasikonforme Abbildung des Einheitskreises U und nach dem Spiegelungsprinzip als eine quasikonforme Abbildung von C auf sich, die in U fast überall die komplexe Dilatation μ_t besitzt mit $w_t(0)=0$, $w_t(1)=1$.

Die Funktion μ_t genügt ebenfalls der Beltrami Gleichung (39)
Wir betrachten nun die quasikonforme Abbildung
$A=w_t S w_t^{-1}$ von U auf sich mit $S \in G_0$.
Mit $w_t = w_t(z)$ folgt dann durch elementare Rechnung

*1 Siehe [21] S. 191 ff

*2 Siehe [21] S. 204

*3 Siehe [21] S. 43

$$A_{\bar z}(z) = (w_t)_z(Sw_t^{-1})\cdot S'(w_t^{-1})(w_t^{-1})_{\bar z}(z) + (w_t)_{\bar z}(Sw_t^{-1})\cdot\overline{S'(w_t^{-1})}\,(\overline{w_t^{-1}})_{\bar z}(z) =$$

$$= (w_t)_z(Sw_t^{-1})\left[S'(w_t^{-1})\cdot(w_t^{-1})_{\bar z}(z) + \mu_t(Sw_t^{-1})\cdot\overline{S'(w_t^{-1})}\cdot(\overline{w_t^{-1}})_{\bar z}(z)\right]$$

Aus

$$(w_t^{-1})_z(z) = \frac{(\overline{w_t})_{\bar z}(w_t^{-1})}{J} \quad \text{und damit} \quad (\overline{w_t^{-1}})_{\bar z}(z) = \frac{(w_t)_z(w_t^{-1})}{J},$$

$$(w_t^{-1})_{\bar z}(z) = -\frac{(w_t)_{\bar z}(w_t^{-1})}{J} = -\frac{\mu_t(w_t^{-1})\cdot(w_t)_z(w_t^{-1})}{J}$$

$$J = |(w_t)_z(w_t^{-1})|^2 - |(w_t)_{\bar z}(w_t^{-1})|^2$$

und der Gültigkeit der Gleichung (39) ergibt sich dann $A_{\bar z} = 0$, das heißt: A ist 1-quasikonform.

Da jede 1-quasikonforme Abbildung konform ist, ist A ein Automorphismus des Einheitskreises und damit eine lineare Transformation.

Zwei Punkte $z_1, z_2 \in U$ sind genau dann äquivalent unter $G_t = w_t G_o w_t^{-1}$, wenn die Punkte $w_t^{-1}(z_1)$, $w_t^{-1}(z_2)$ unter G_o äquivalent sind. G_t ist also eine Fuchssche Gruppe.
Jedem t mit $0 \leq t \leq 1$ entspricht demnach eine Fuchssche Gruppe G_t, wobei aufgrund der Normierung von w_t den Werten 0 und 1 die Gruppen G_o und G_1 entsprechen (w_o= Identität, w_1=w).
Es sei Λ_t die singuläre Menge der Gruppe G_t mit der Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_t)$.
Wir zeigen nun, daß die Funktion $t \longrightarrow d(\Lambda_t)$ auf $0 \leq t \leq 1$ stetig ist. Hierzu benutzen wir den folgenden Verzerrungssatz.

Satz II 1 *
Ist w eine K-quasikonforme Selbstabbildung des Einheitskreises mit w(0)=0, dann gilt für jedes Paar von Punkten z_1, z_2 mit $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$

(40) $$|w(z_1)-w(z_2)| \leq 16\,|z_1-z_2|^{\frac{1}{K}}$$

* Siehe [21] S. 69

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir nun

Lemma II 2

Ist w eine die Voraussetzungen des Satzes II 1 erfüllende Abbildung und e eine abgeschlossene Teilmenge des abgeschlossenen Einheitskreises U ($|z|\leq 1$), so gilt für die Hausdorff-Dimensionen d(e) und d(w(e)) die Ungleichung

(41) $$\frac{1}{K}\, d(e) \leq d(w(e)) \leq K\, d(e)$$

Beweis: Es sei $\eta > d(e)$; $\delta, \varepsilon > 0$

Dann läßt sich e durch offene Kreisscheiben $k_1, k_2, \ldots$ mit den Radien $r_1, r_2, \ldots$ überdecken, derart, daß $r_i \leq \delta$ (i=1,2,...) und $\sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^{\eta} < \varepsilon$ gilt.

Fügt man zu $k_1, k_2, \ldots$ jeweils den Rand hinzu, so erhält man die abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots$.

Für den Durchmesser d_j der Menge $w(\bar{k}_j \cap e)$ gilt dann nach (40)

(42) $$d_j \leq 16(2r_j)^{\frac{1}{K}} \qquad j=1,2,\ldots$$

Wir wählen nun aus jeder Menge $w(\bar{k}_j \cap e)$ (j=1,2,...) einen Punkt z_j und bilden einen offenen Kreis k'_j mit dem Radius $2d_j$ und dem Mittelpunkt z_j. Die Kreise k'_j überdecken ganz w(e) und es gilt nach (42)

(43) $$\sum_j (4d_j)^{K\cdot\eta} \leq 64^{K\eta} \sum_j (2r_j)^{\eta} \leq 64^{K\eta}\cdot\varepsilon$$

Da δ und ε unabhängig voneinander gewählt werden können, ist für festes K wegen $d_j \leq 16(2\delta)^{\frac{1}{K}}$ das $K\eta$-dimensionale Hausdorff-Maß $M_{K\eta}(w(e))$ von w(e) gleich 0.

Es folgt $d(w(e)) \leq K\, d(e)$

Da mit w die Umkehrabbildung w^{-1} ebenfalls K-quasikonform ist* und $w^{-1}(0) = 0$ gilt, folgt nach dem eben Bewiesenen $d(e) \leq K\, d(w(e))$. Hiermit ist die Ungleichung (41) vollständig bewiesen.

* Siehe [21] S. 17

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir nun

<u>Lemma II 3</u>

Die Funktion $t \to \delta(\Lambda_t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ ist stetig.

<u>Beweis:</u> Wie man sofort einsieht, bildet die oben eingeführte Abbildung w_t die singuläre Menge Λ_0 auf Λ_t ab.
$w_t(\Lambda_0) = \Lambda_t$.
Ist nun $0 \leq t_0 \leq 1$, so ist also $w_t \circ w_{t_0}^{-1}(\Lambda_{t_0}) = \Lambda_t$
Wir berechnen die partiellen Ableitungen $h_z, h_{\bar z}$ der Abbildung $h = h(t) = w_t \circ w_{t_0}^{-1}$.
Mit $w_{t_0}^{-1} = w_{t_0}^{-1}(z)$ gilt

$$h_{\bar z} = (w_t)_z(w_{t_0}^{-1}) \cdot (w_{t_0}^{-1})_{\bar z}(z) + (w_t)_{\bar z}(w_{t_0}^{-1}) \cdot (\overline{w_{t_0}^{-1}})_{\bar z}(z) =$$

(44)
$$= (w_t)_z(w_{t_0}^{-1}) \left[(w_{t_0}^{-1})_{\bar z}(z) + t\,\mu(w_{t_0}^{-1}) \cdot (\overline{w_{t_0}^{-1}})_{\bar z}(z) \right]$$

$$= \frac{(w_t)_z(w_{t_0}^{-1})\,(\overline{w_{t_0}})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})}{J} \left[(t - t_0) \cdot \mu(w_{t_0}^{-1}) \right]$$

mit $J = |(w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})|^2 - |(w_{t_0})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})|^2$ (J ist fast überall ungleich 0)

Die letzte Gleichung von (44) folgt sofort, wenn man beachtet, daß

$$(\overline{w_{t_0}^{-1}})_{\bar z}(z) = \frac{(w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})}{J}$$

$$(w_{t_0}^{-1})_{\bar z}(z) = -\frac{(w_{t_0})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})}{J} = -\frac{t_0\,\mu(w_{t_0}^{-1}) \cdot (w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})}{J}$$ gilt.

Für h_z erhält man

$$h_z = (w_t)_z(w_{t_0}^{-1}) \cdot (w_{t_0}^{-1})_z(z) + (w_t)_{\bar z}(w_{t_0}^{-1}) \cdot (\overline{w_{t_0}^{-1}})_z(z) =$$

(45)
$$= (w_t)_z(w_{t_0}^{-1}) \left[(w_{t_0}^{-1})_z(z) + t\,\mu(w_{t_0}^{-1}) \cdot (\overline{w_{t_0}^{-1}})_z(z) \right] =$$

$$= \frac{(w_t)_z(w_{t_0}^{-1}) \cdot (\overline{w_{t_0}})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})}{J} \left[1 - t t_0 \, |\mu(w_{t_0}^{-1})|^2 \right]$$

Die letzte der Gleichungen (45) gewinnt man unter Beachtung nachfolgender Gleichungen

$$(w_{t_0}^{-1})_z(z) = \frac{(\overline{w_{t_0}})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})}{J} = \frac{\overline{(w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})}}{J}$$

$$(\overline{w_{t_0}^{-1}})_z(z) = \frac{(\overline{w_{t_0}})_z(w_{t_0}^{-1})}{J} = - \frac{\overline{(w_{t_0})_{\bar z}(w_{t_0}^{-1})}}{J} =$$

$$= - \frac{\overline{t_0 \; \mu(w_{t_0}^{-1}) \cdot (w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})}}{J} = - t_0 \cdot \overline{\mu(w_{t_0}^{-1})} \; \frac{\overline{(w_{t_0})_z(w_{t_0}^{-1})}}{J}$$

Die partiellen Ableitungen $h_z, h_{\bar z}$ der quasikonformen Abbildung h existieren fast überall im Einheitskreis U und es gilt $|h_z| > 0$ fast überall in U.
Also gilt fast überall in U

$$\left|\frac{h_{\bar z}}{h_z}\right| = \frac{|t-t_0| \;\; |\mu(w_{t_0}^{-1})|}{1-tt_0 \cdot |\mu(w_{t_0}^{-1})|^2} \leq \frac{|t-t_0|}{1-tt_0 k^2} \leq \frac{|t-t_0|}{1-k^2}$$

wegen $|\mu(z)| \leq k < 1$.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man also ein $\delta > 0$ finden, derart, daß für alle t mit $|t-t_0| \leq \delta$ fast überall in U

$$|\varkappa| = |\varkappa(t)| = \left|\frac{h_{\bar z}}{h_z}\right| \leq \varepsilon \quad \text{gilt.}$$

Zwischen der komplexen Dilatation $\varkappa$ und der Dilatation D_z von h im Punkte z besteht folgender Zusammenhang

$$D_z = \frac{1 + |\varkappa|}{1 - |\varkappa|}$$

Ist $K=K(t)$ die maximale Dilatation von h, so kann man demnach zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, derart, daß für alle t mit $|t-t_0| \leq \delta$ gilt $K-1 = |K-1| \leq \varepsilon$

Aus der Ungleichung (41) von Lemma II 2 folgt

$$\frac{1}{K}\, d(\Lambda_{t_0}) \leq d(\Lambda_t) \leq K\, d'(\Lambda_{t_0}) \qquad \text{also}$$

$$(\tfrac{1}{K}-1)\, d(\Lambda_{t_0}) \leq d(\Lambda_t) - d(\Lambda_{t_0}) \leq (K-1)\, d(\Lambda_{t_0})$$

Hieraus erkennt man sofort, daß die Funktion $t \to d(\Lambda_t)$ stetig im Punkte t_0 ist. Damit ist Lemma II 3 bewiesen.

Aus der Stetigkeit von $t \to d(\Lambda_t)$ folgt, daß $d(\Lambda_t)$ jeden Wert zwischen $d(\Lambda_0)$ und $d(\Lambda_1) > \frac{1}{2}$ annimmt.
Damit haben wir gezeigt, daß es zu jedem r mit $0 < r \leq \frac{1}{2}$ eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe gibt, deren singuläre Menge die Hausdorff-Dimension r hat.

Nach Beispiel 2 des Kapitels I, Satz I 10 und den Ausführungen im Anschluß an den Beweis zu Satz I 10 kann man zwei Gruppen, die wir wieder mit G_0, G_1 bezeichnen wollen, angeben, derart, daß $d(\Lambda_0)$, $d(\Lambda_1)$ hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ bzw. 1 liegen. Jede dieser Fuchsschen Gruppen ist vom Ford-Typ und wird von einem parabolischen Element mit dem Fixpunkt 1 und einem elliptischen Element mit der Periode 2 dessen Fixpunkte auf der negativen reellen Achse liegen, erzeugt. Dem oben betrachteten Polygon B_i entspricht hier ein Polygon, dessen Rand insgesamt vier Eckpunkte $p_1^i, \ldots, p_4^i$ aufweist, wobei $p_1^i = 1$ und p_4^i der Fixpunkt des entsprechenden elliptischen Elements ist $(i=1,2)$; $|p_4^i| < 1$.
Wir können nun das oben durchgeführte Beweisverfahren ohne eine nennenswerte Abänderung wiederholen.
Als Ergebnis erhalten wir schließlich, daß man zu jeder Zahl r mit $\frac{1}{2} < r < 1$ eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe finden kann, deren zugehörige Hausdorff-Dimension gleich r ist.
Da es endlich erzeugte Fuchssche Gruppen erster Art $(d(\Lambda)=1)$

gibt und jede zyklische Gruppe höchstens zwei Grenzpunkte besitzt ($d(\Lambda)=0$) ist damit abschließend folgender Satz bewiesen.

Satz II 2
Zu jeder Zahl r mit $0 \leq r \leq 1$ gibt es eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe, deren singuläre Menge die Hausdorff-Dimension r hat.

3) Die lokale Hausdorff-Dimension der singulären Menge

Bevor wir in 4) das obige Verfahren auf nicht Fuchssche Gruppen erweitern, wodurch sich für allgemeine Kleinsche Gruppen die obere Grenze für r zumindest bis $\frac{3}{2}$ verschieben läßt, wollen wir eine Aussage über die lokale Hausdorff-Dimension beweisen, die an sich interessant und für manche Zwecke dienlich ist.
Wir zeigen, daß die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ schon durch lokale Eigenschaften von Λ bestimmt ist.
Es gilt genauer

Satz II 3
Ist G eine Kleinsche Gruppe mit der singulären Menge Λ ($\infty \notin \Lambda$) und U eine beliebige Umgebung eines Grenzpunktes z_0 von G, so gilt für die Hausdorff-Dimensionen $d(\Lambda)$ und $d(\Lambda \cap U)$: $\quad d(\Lambda) = d(\Lambda \cap U)$

Beweis: Es seien U_1, U_2 punktfremde Umgebungen zweier Grenzpunkte. Nach Lemma I 1 kann man eine hyperbolische oder loxodromische Transformation S aus G finden, derart, daß die isometrischen Kreise $H_S, H_{S^{-1}}$ ganz in U_1 liegen.
S bildet $\Lambda \cap U_2$ auf eine Teilmenge von $\Lambda \cap U_1$ ab.
Da $S(\Lambda \cap U_2)$ und $\Lambda \cap U_2$ gleiche Hausdorff-Dimensionen haben, folgt $\quad d(\Lambda \cap U_2) \leq d(\Lambda \cap U_1)$.

Vertauscht man bei den obigen Überlegungen U_1 und U_2, so ergibt sich

(46) $$d(\Lambda \cap U_1) = d(\Lambda \cap U_2)$$

Ist nun U eine beliebige Umgebung des Grenzpunkts z_0, so wählen wir zu $z_0 \in U$ eine offene Kreisumgebung $k(r)$ mit dem Radius r und dem Mittelpunkt z_0, die ganz in U liegt und bestimmen zu jedem Punkt z aus der abgeschlossenen Menge $\Lambda \cap C(k(r))$ ($C(k(r))$ - Komplement von $k(r)$ in bezug auf die endliche Zahlenebene) eine offene Kreisumgebung $k_z(\frac{r}{2})$ mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und dem Mittelpunkt z.

Da $\Lambda \cap C(k(r))$ abgeschlossen ist, überdecken schon endlich viele dieser Umgebungen ($k_{z_1}(\frac{r}{2}), \ldots, k_{z_n}(\frac{r}{2})$) ganz $\Lambda \cap C(k(r))$.

Nach (46) gilt für jedes z_i $i=1,\ldots,n$;

$$d(\Lambda \cap k(\tfrac{r}{2})) = d(\Lambda \cap k_{z_i}(\tfrac{r}{2})),$$

wobei $k(\frac{r}{2})$ eine offene Kreisumgebung von z_0 ist mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und dem Mittelpunkt z_0.

Aus $\eta > d(\Lambda \cap U)$ folgt nun $\eta > d(\Lambda \cap k(\frac{r}{2}))$ und damit für das Hausdorff-Maß M_η

$$M_\eta(\Lambda \cap U) = M_\eta(\Lambda \cap k_{z_1}(\tfrac{r}{2})) = \ldots = M_\eta(\Lambda \cap k_{z_n}(\tfrac{r}{2})) = 0$$

also $M_\eta(\Lambda) = 0$.

Hieraus schließt man $d(\Lambda) \leq d(\Lambda \cap U)$.

Da natürlich $d(\Lambda \cap U) \leq d(\Lambda)$ gilt, folgt die Behauptung des Satzes.

4) Die Existenz Kleinscher Gruppen mit vorgegebener Hausdorff-Dimension

Wir wollen nun das in 2) durchgeführte Verfahren auf beliebige Gruppen vom Ford-Typ ohne parabolische Erzeugende übertragen. Mit Hilfe eines von T. Akaza hergeleiteten

Resultats läßt sich dann die für Fuchssche Gruppen natürliche Grenze 1 für allgemeine Kleinsche Gruppen zumindest bis $\frac{3}{2}$ verschieben.

Es sei also G_1 eine beliebige Kleinsche Gruppe vom Ford-Typ ohne parabolische Erzeugende. Dann lassen sich Erzeugende $S_1, S_2, \dots, S_k, E_1, \dots, E_m$ finden, derart, daß die von den $N=2k+m$ isometrischen Kreisen $H_{S_1}, H_{S_1^{-1}}, \dots H_{S_k}, H_{S_k^{-1}}, H_{E_1}, \dots, H_{E_m}$ berandeten abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{S_1}, D_{S_1^{-1}}, \dots, D_{S_k}, D_{S_k^{-1}}, D_{E_1}, \dots, D_{E_m}$ paarweise punktfremd sind. Die Erzeugenden $S_1, \dots, S_k$ sind hyperbolisch oder loxodromisch, die Elemente $E_1, \dots, E_m$ hingegen elliptisch mit der Periode 2.

Das Gebiet $F_1 = \bigcap_{S \in W_1} CD_S$ (CD_S- Komplement von D_S in Bezug auf die abgeschlossene Zahlenebene) mit $W_1 = \{S_1, S_1^{-1}, \dots, S_k, S_k^{-1}, E_1, \dots, E_m\}$ ist ein von den isometrischen Kreisen $H_{S_1}, H_{S_1^{-1}}, \dots, H_{S_k}, H_{S_k^{-1}}, H_{E_1}, \dots, H_{E_m}$ berandetes Fundamentalgebiet von G_1.

Zu G_1 konstruieren wir eine Fuchssche Gruppe G_0, indem wir N Kreise $H_{T_1}, H_{T_1^{-1}}, \dots, H_{T_k}, H_{T_k^{-1}}, H_{L_1}, \dots, H_{L_m}$, die den Einheitskreis ($|z|=1$) senkrecht schneiden, mit folgenden Eigenschaften vorgeben:

1) $I_T^* \cap D_S = \emptyset$ für $S \neq T$ $S, T \in W_0$

$W_0 = \{T_1, T_1^{-1}, \dots T_k, T_k^{-1}, L_1, \dots, L_m\}$

2) Die Radien der Kreise $H_{T_i}, H_{T_i^{-1}}$ sind gleich ($R_{T_i} = R_{T_i^{-1}}$) für $i=1, \dots, k$.

Durch diese Kreise lassen sich k hyperbolische Transformationen $T_1, \dots, T_k$ und m elliptische Transformationen $L_1, \dots, L_m$ mit der Periode 2 bestimmen, derart, daß diese Transformationen sämtlich den Einheitskreis ($|z| < 1$) auf sich abbilden.

Die Zuordnung $T_i \longrightarrow S_i$ $(i=1, \dots, k)$ $L_j \longrightarrow E_j$ $(j=1, \dots, m)$

induziert einen Isomorphismus ψ von G_0 auf G_1.

Der erste Schritt besteht nun darin, eine quasikonforme Abbildung von $F_0 = \bigcap_{T \in W_0} CD_T$ auf $F_1 = \bigcap_{S \in W_1} CD_S$ zu konstruieren, die unter G_0 äquivalente Punkte des Randes ∂F_0 auf unter G_1 äquivalente Punkte von ∂F_1 abbildet.

Zu diesem Zweck modifizieren wir ein Verfahren von O. Teichmüller.*

Wir fixieren zunächst einen Punkt $z_0 \in F_1$, $z_0 \neq \infty$ und bestimmen N von z_0 ausgehende doppelpunktfreie Wege $l_{S_1}, l_{S_1^{-1}}, \ldots l_{S_k}, l_{S_k^{-1}}, l_{E_1}, \ldots, l_{E_m}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Jeder Weg l_S ; $S \in W_1$; setzt sich aus endlich vielen Strecken und Kreisbögen zusammen, so, daß in einem gemeinsamen Endpunkt zweier derartiger Wegstücke die Tangente stetig übergeht.
   Die Wege l_S sind paarweise punktfremd.

2) l_S beginnt in z_0 und endet in einem Punkt z_S auf H_S.
   Das in z_0 beginnende Anfangsstück a_S ist eine Strecke und das in z_S endende Endstück e_S trifft H_S senkrecht.
   Jeder Weg l_S; $S \in W_1$; verläuft mit Ausnahme seines Endpunkts ganz in F_1.

3) Durchläuft man einen hinreichend kleinen Kreis mit dem Mittelpunkt z_0 im Sinne der negativen Orientierung (Beim Durchlaufen des Kreises im Sinne der negativen Orientierung soll der Punkt z_0 zur Rechten liegen) so trifft man die Anfangsstücke in der Reihenfolge $a_{S_1}, a_{S_1^{-1}}, a_{S_2}, a_{S_2^{-1}}, \ldots, a_{S_k}, a_{S_k^{-1}}, a_{E_1}, \ldots, a_{E_m}$.
   Zwei benachbarte Anfangsstücke schließen einen Winkel $\frac{2\pi}{N}$ ein.

4) Ist S ;$S \in W_1$; hyperbolisch oder loxodromisch, so gilt $S(z_S) = z_{S^{-1}}$ und $S(e_S)$ liegt auf dem durch $e_{S^{-1}}$ bestimmten Orthokreis zu $H_{S^{-1}}$. Ist S; $S \in W_1$; elliptisch, so ist z_S Fixpunkt von S, und e_S eine Strecke auf der Verbindungs-

* Siehe [25]

geraden der beiden Fixpunkte von S.

Die Wege l_S zusammen mit den Kreisen H_S ($S \in W_1$) beranden ein einfach zusammenhängendes Gebiet B_1, das sich durch eine konforme Abbildung h_1 auf den Einheitskreis ($|z|<1$) abbilden läßt. Nach den Sätzen über die Ränderzuordnung entsprechen den beiden Ufern eines Weges l_S zwei Kreisbögen auf dem Einheitskreis $|z| = 1$.
Bezeichnen wir die Bilder des rechten bzw. linken Ufers von l_S mit b_{r_S} bzw. b_{l_S}, das Bild von H_S mit b_{H_S}, so folgen auf dem Einheitskreis $|z|=1$ im positiven Sinne die Bilder in der zyklischen Reihenfolge

$$b_{l_{S_1}}, b_{H_{S_1}}, b_{r_{S_1}}, b_{l_{S_1^{-1}}}, b_{H_{S_1^{-1}}}, b_{r_{S_1^{-1}}}, \ldots, b_{l_{E_1}}, b_{H_{E_1}}, b_{r_{E_1}}, \ldots, b_{l_{E_m}}, b_{H_{E_m}}, b_{r_{E_m}}$$

Die Kreisbögen b_{l_S}, b_{r_S} setzen sich entsprechend der Zusammensetzung von l_S aus endlich vielen Bogenstücken zusammen.
Jeder Bogen $b_{H_{E_i}}$ $(i=1,\ldots,m)$ wird durch das Bild des von z_{E_i} verschiedenen zweiten Fixpunktes von E_i in zwei Bogenstücke $b_{l_{H_{E_i}}}, b_{r_{H_{E_i}}}$ zerlegt.
Berücksichtigt man dies, so wird der Einheitskreis $|z|=1$ in endlich viele Bögen $b_1,\ldots,b_n$ mit den Anfangspunkten $z_1,\ldots,z_n$ zerlegt.
Die Abbildung $h_1 S_i h_1^{-1}$ bildet $b_{H_{S_i}}$ eineindeutig und stetig auf $b_{H_{S_i^{-1}}}$ ab $(i=1,\ldots,k)$.
$h_1 E_j h_1^{-1}$ bildet $b_{l_{H_{E_j}}}$ auf $b_{r_{H_{E_j}}}$ ab und umgekehrt $(j=1,\ldots,m)$.
Ebenso induziert h_1 eine eineindeutige und stetige Abbildung von b_{l_S} auf b_{r_S} für $S \in W_1$.
Die Abbildung h_1 bestimmt auf diese Weise zu jedem Bogen $b_i, i \in \{1,\ldots,n\}$, eine Abbildung, die b_i eineindeutig und stetig auf einen von b_i verschiedenen Bogen $b_{i'}$, $i' \in \{1,\ldots,n\}$ abbildet. Nach Konstruktion der Wege l_S ($S \in W_1$) und der Bestimmung der Bögen $b_1,\ldots,b_n$ ist diese Abbildung in jedem

inneren Punkt von b_i konform, was man sofort unter Berücksichtigung des Spiegelungsprinzips erkennt. Wir zeigen nun zunächst, daß in jedem Falle diese Abbildung auch noch in den beiden Randpunkten z_i, z_{i+1} von b_i von einer Seite her stetig differenzierbar ist.
Dazu müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.
1) Es sei $z_i = h_1(z_S)$ für ein $S \in \{S_1, S_1^{-1}, \ldots, S_k, S_k^{-1}\}$ und $b_i = b_{H_S}$. (Die auf den Rand von B_1 fortgesetzte Abbildung wollen wir ebenfalls mit h_1 bezeichnen, wobei die linken und rechten Ufer der Wege l_S als getrennt zu betrachten sind und der Punkt z_0 N-fach zu zählen ist)
Mit Hilfe einer linearen Transformation A, die z_S nach 0 überführt, bilden wir H_S auf die imaginäre Achse und das Endstück e_S auf eine Strecke der positiven reellen Achse ab. Wir führen nun als neue lokale Parameter $z' = (A(z))^2 = g(z)$ ein und erkennen, daß $g \circ h_1^{-1}$ durch Spiegelung auch nach z_i konform fortsetzbar ist.
Der durch $e_{S^{-1}}$ bestimmte Kreis K^* teilt zusammen mit $b_{H_{S^{-1}}}$ eine hinreichend kleine Umgebung von $z_{S^{-1}}$ in vier Quadranten auf.
Durch eine lineare Transformation A^* , die $z_{S^{-1}}$ in 0 überführt, bilden wir K^* auf die imaginäre und $H_{S^{-1}}$ auf die reelle Achse ab (Siehe Bild 2).
Gehen wir nun zu den neuen lokalen Parametern $z^* = (A^*(z))^2$ über, so erkennt man unter Berücksichtigung des Spiegelungsprinzips und der Voraussetzungen über $l_S, l_{S^{-1}}$ sofort, daß $h_1 S h_1^{-1}$ nach z_i konform fortsetzbar ist.
Eine kleine Skizze soll dies veranschaulichen.

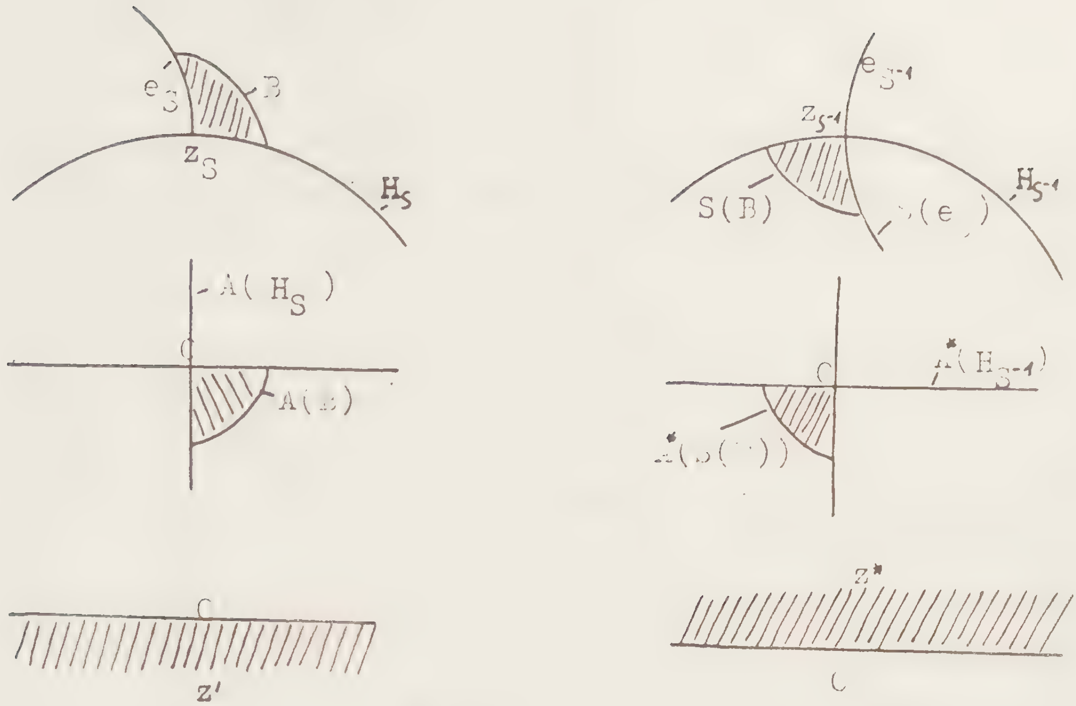


Bild 2

Aus obiger Konstruktion ergibt sich unmittelbar, daß auch für den Fall, daß b_i das Anfangsstück des Bogens b_{r_S} ist, die Umkehrabbildung der eingangs erwähnten Abbildung nach z_i konform fortsetzbar ist.

2) $z_i = h_1(z_E)$ mit $E \in \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$.
Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen über e_E kann man hier ähnlich wie unter 1) sofort schließen, daß die in Frage stehende Abbildung nach z_i konform fortsetzbar ist.

3) Ist z'_E der zweite von z_E verschiedene Fixpunkt von E und $z_i = h_1(z'_E)$, so ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Spiegelungsprinzips, daß $h_1 E h_1^{-1}$ nach z_i konform fortsetzbar ist.

4) Um die Fortsetzbarkeit für $z_i = h_1(z_0)$ nachzuweisen, führen wir zunächst z_0 durch eine Translation mit anschließender Drehung nach 0 über $(A(z_0) = 0)$ derart, daß ein vorgegebenes Anfangsstück a_S von l_S $(S \in W_1)$ auf eine Strecke der positiven reellen Achse abgebildet wird. Die beiden zu a_S benachbarten Winkelbereiche werden dann nach den über a_S gemachten Voraussetzungen durch $z' = g(z) = \sqrt{(A(z))^N}$ auf die obere bzw. untere Halbebene abgebildet. Wählt man $z' = g(z)$

als lokalen Parameter, so erkennt man wieder unter Berücksichtigung des Spiegelungsprinzips, daß die in Frage stehende Abbildung nach z_i konform fortsetzbar ist.

5) Es bleibt noch der Fall $z_i=h_1(z^*)$, wo z^* ein gemeinsamer Endpunkt zweier benachbarter Kreisbögen (einschließlich des Falles, daß eines der beiden Teilstücke eine Strecke ist) eines Weges l_S ist.
Durch eine lineare Transformation A, die z^* auf 0 und einen der beiden Kreisbögen auf eine Strecke der positiven reellen Achse abbildet, geht eine kleine Umgebung von z^* in eine Umgebung des Nullpunkts über. Wir nehmen zunächst an, daß das Bild b des zweiten Kreisbogens in der unteren Halbebene liegt. Durch die Funktion $z \longrightarrow k\frac{1}{z} = z'$ $(k>0)$ wird dieses Bild auf einen parallel zur reellen Achse nach $-\infty$ verlaufenden Strahl abgebildet, der bei geeigneter Wahl von k auf der Geraden $\operatorname{Im} z = \pi$ liegt.
Für die weiteren Überlegungen beachten wir, daß die Funktion $g(s)= s+\log s$ die obere Halbebene $\operatorname{Im} s>0$ auf die längs des Strahls $\operatorname{Im} z =\pi$, $\operatorname{Re} z \leq -1$ aufgeschlitzte obere Halbebene konform abbildet. Man erkennt sofort, daß g die positive reelle Achse auf die gesamte reelle Achse und die negative reelle Achse auf die beiden Ufern des Strahls $\operatorname{Im} z =\pi$, $\operatorname{Re} z \leq -1$ abbildet, wobei -1 nach $-1+\pi i$ übergeführt wird. Mit Hilfe des Argumentprinzips sieht man leicht ein, daß g konform ist.
Für alle s' in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 mit $\operatorname{Im} s' \leq 0$ betrachten wir nun die folgende Funktion h

$$s' \longrightarrow \frac{1}{s'} = s \longrightarrow g(s)=z' \longrightarrow k\frac{1}{z'} = z = h(s') \quad , \quad h(0)=0 \ .$$

h bildet ein Gebiet der unteren Halbebene auf einen durch b und der positiven reellen Achse bestimmten kleinen Sektor in der Nähe von 0 ab, wobei das Bild einer Strecke der reellen Achse aus in 0 angrenzenden Teilen von b und der reellen Achse besteht. Wird nun durch Ah_1^{-1} ein Gebiet

$U_{z_i} \cap U$ (U_{z_i}- kleine Umgebung von z_i, U- Einheitskreis $|z|<1$) auf diesen Sektor konform abgebildet und wählt man statt z den lokalen Parameter s', so ist die daraus resultierende Abbildung aufgrund des Spiegelungsprinzips nach z_i konform fortsetzbar.

Die Funktion $z=h(s')=k \dfrac{s'}{1+s' \log \frac{1}{s'}}$ ist auch in $s'=0$

($h(0)=0$) differenzierbar mit der Ableitung k ($k>0$).

Bezeichnet man die Variable in $\overline{U_{z_i} \cap U}$

($\overline{U_{z_i} \cap U} = (U_{z_i} \cap U) \cup \partial(U_{z_i} \cap U)$) mit ς, so ist die Funktion $\varsigma \longrightarrow z$ auf einem kleinen Bogen des Einheitskreises $|z|=1$, der z_i in seinem Innern enthält, stetig differenzierbar. Wird nun $U_{z_i} \cap U$ durch Ah_1^{-1} auf einen von b und der positiven reellen Achse bestimmten Sektor, der mit der oberen Halbebene Punkte gemeinsam hat, abgebildet, so betrachte man statt g(s) die Funktion $g^*(s)=s-\log s$ in der unteren Halbebene.

g^* führt die negative reelle Achse in die Gerade $\operatorname{Im} s=\pi$ und die positive reelle Achse in die beiden Ufern des Strahls $\operatorname{Im} s=0$, $\operatorname{Re} s \geq 1$ über. An die Stelle der Abbildung h tritt die Abbildung $s' \longrightarrow k \dfrac{s'}{1-s' \log \frac{1}{s'}}$ $\quad (k>0)$, $\operatorname{Im} s' \geq 0$

die wiederum in $s'=0$ differenzierbar ist.

Ähnlich wie oben kann man schließen, daß die Abbildung $\varsigma \longrightarrow z$ auf einem Bogen des Einheitskreises $|z|=1$, der z_i in seinem Innern enthält, stetig differenzierbar ist.

Wir wollen auch hier die Verhältnisse anschaulich skizzieren, wobei schraffierte Bereiche einander entsprechen.

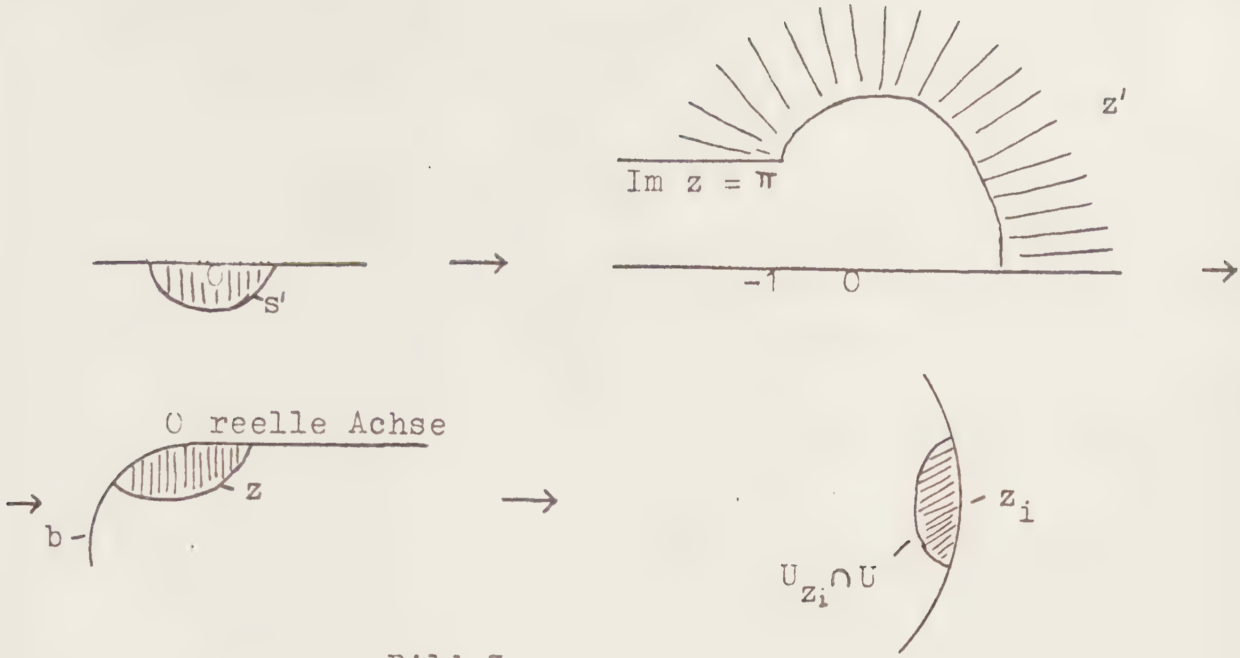


Bild 3

Liegt schließlich b in der oberen Halbebene, so kann man ähnlich schließen, indem man g in der unteren und g^* in der oberen Halbebene betrachtet.
In jedem Falle ist also auch hier die in Frage stehende Abbildung in z_i stetig differenzierbar.
Zusammenfassend haben wir damit folgendes festgestellt:
Jedem Bogen b aus $\{b_1, \dots, b_n\}$ entspricht nach obiger Konstruktion ein Bogen b' derart, daß die durch h_1 induzierte stetig differenzierbare Abbildung von b auf b' auch noch in den Endpunkten von b von einer Seite her stetig differenzierbar ist mit nicht verschwindendem Differentialquotienten.
Analog wie bei der Gruppe G_1 verfahren wir nun bei der Gruppe G_0 $(G_1 = \Psi(G_0))$. Dem einfach zusammenhängenden Gebiet B_1 entspricht das einfach zusammenhängende Gebiet B_0, das durch die Wege

$l_{T_1}, l_{T_1^{-1}}, \dots, l_{T_k}, l_{T_k^{-1}}, l_{L_1}, \dots, l_{L_m}$ und die isometrischen Kreise H_T ; $T \in W_0 = \{T_1, T_1^{-1}, \dots, T_k, T_k^{-1}, L_1, \dots, L_m\}$

berandet wird. Die Wege l_T ; $T \in W_0$; sind ähnlich konstruiert wie die Wege l_S; $S \in W_1$; und wir können voraussetzen, daß l_T und l_S für $T = \Psi^{-1}(S)$; $T \in W_0$, $S \in W_1$; aus der gleichen Anzahl von Kreisbögen (Strecken) zusammengesetzt sind, was notfalls durch Unterteilung der Anfangsstrecken a_S, a_T

erreicht werden kann. Der Abbildung h_1 entspricht die Abbildung h_0 und den Bögen $b_1,\ldots,b_n$ entsprechen die Bögen $b_1^*\ldots b_n^*$. Aufgrund der Konstruktion und des Isomorphismus' gibt es eine natürliche Zuordnung $b \to b^*$ zwischen den Bögen $b_1,\ldots,b_n$ und den Bögen $b_1^*,\ldots,b_n^*$.
Es sei nun $b \in \{b_1,\ldots,b_n\}$ ein Bogen mit folgender Eigenschaft:

(47) $b = b_{H_{S_i}}; S_i \in \{S_1,\ldots,S_k\}$ oder $b = b_{l_{H_{E_i}}}; E_i \in \{E_1,\ldots,E_m\}$

oder $b \subset b_{l_S}; S \in W_1$.

Dann bilden wir b mit Hilfe einer geeigneten linearen Abbildung $\alpha\varphi+\beta$ $(z=e^{i\varphi})$ auf den entsprechenden Bogen b^* ab.
Ist dagegen

$b = b_{H_{S_i^{-1}}}; S_i \in \{S_1,\ldots,S_k\}$ oder $b= b_{r_{H_{E_i}}}; E_i \in \{E_1,\ldots,E_m\}$

oder $b \subset b_{r_S}; S \in W_1$,

so bilden wir b zunächst mit Hilfe der oben untersuchten durch h_1 induzierten stetig differenzierbaren Abbildung auf den entsprechenden Bogen b' mit der Eigenschaft (47) ab. Der Bogen b' wird dann auf den entsprechenden Bogen b'^* und dieser wiederum durch die von h_0 induzierte Abbildung auf den zugeordneten Bogen $b'^{*'}$ abgebildet.
Auf diese Weise erhält man eine eineindeutige und stetige Abbildung $e^{i\varphi} \to e^{i\varphi'}$ des Einheitskreises $|z|=1$ auf sich, die auf jedem der Bögen $b_1,\ldots,b_n$ einschließlich der Endpunkte stetig differenzierbar ist (in den Endpunkten erfolgt die Differentiation nur von einer Seite her).
Man erkennt unmittelbar aus der obigen Konstruktion, daß die Funktion $\varphi \to \varphi'=f(\varphi)$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; monoton steigend ist.
Wir bilden nun den Einheitskreis $|z| \leq 1$ durch die Funktion

$f^*((r,\varphi))=(r,f(\varphi))$ $\quad (z=r\cdot e^{i\varphi}$; $f^*(z)=r\cdot e^{if(\varphi)}$)

auf sich ab.
((r,φ) bzw. $(r,f(\varphi))$ sind hier Polarkoordinaten)
f^* ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus.
Verbindet man die Randpunkte der Bögen $b_1,\dots,b_n$ geradlinig mit dem Nullpunkt, so erhält man n offene Kreissektoren.
Infolge der Eigenschaften von f ist f^* in jedem dieser Sektoren stetig differenzierbar und damit absolut stetig auf Geraden.
Für die partiellen Ableitungen $f^*_z = \frac{1}{2}(f^*_x - if^*_y)$, $f^*_{\bar z} = \frac{1}{2}(f^*_x + if^*_y)$ folgt durch elementare Rechnung

$$\left|\frac{f^*_{\bar z}}{f^*_z}\right|^2 = \left[\frac{1-f'(\varphi)}{1+f'(\varphi)}\right]^2 \quad \text{also} \quad \left|\frac{f^*_{\bar z}}{f^*_z}\right| = \left|\frac{1-f'(\varphi)}{1+f'(\varphi)}\right| \qquad f'(\varphi) = \frac{df}{d\varphi}\Big|_\varphi$$

Aus den vorangehenden Ausführungen ergibt sich unmittelbar, daß es von φ unabhängige positive Zahlen q_0, q_1 gibt mit $q_1 \geq f'(\varphi) \geq q_0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$.
Hieraus folgt die Existenz einer Zahl q; $0 \leq q < 1$ mit der Eigenschaft, daß die komplexe Dilatation

$$\mu(z) = \frac{f^*_{\bar z}(z)}{f^*_z(z)}$$ unabhängig von z die Bedingung $|\mu(z)| \leq q < 1$

erfüllt.
Die Abbildung f^* ist also auf jedem der n Kreissektoren quasikonform. Ist K(B) die maximale Dilatation von f^* auf $B \subset U$, c ein analytischer Bogen, der mit möglicher Ausnahme seiner Endpunkte ganz in B verläuft, und K(B-c) die maximale Dilatation von f^* auf dem Restbereich B-c, so gilt K(B-c)=K(B).*
Hieraus folgt, daß f^* in $U-\{0\}$ quasikonform ist. Da jeder isolierte Randpunkt eine hebbare Singularität für quasikonforme Abbildungen ist, ergibt sich schließlich die Quasikonformität von f^* in ganz U.
Die Abbildung $h_0^{-1} f^* h_1 = w$ bildet B_1 auf B_0 ab und ist eben-

* Siehe [21] S. 47 und [3]

falls quasikonform. Aus der Konstruktion von h_1, f^*, und h_0 folgt sofort, daß w eineindeutig und stetig auf jeden Weg l_S und jeden Kreis H_S ($S \in W_1$) fortgesetzt werden kann und daß diese Fortsetzung l_S auf l_T und H_S auf H_T ($T \in W_0$) mit $\Psi(T)=S$ abbildet. Bezeichnen wir die so fortgesetzte Abbildung wieder mit w, so ist w also ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von $F_1 \cup \partial F_1$ auf $F_0 \cup \partial F_0$, der aus den oben erläuterten Gründen quasikonform auf ganz F_1 ist. Außerdem erkennt man aus der Konstruktion von w, daß zwei unter G_1 äquivalente Punkte von ∂F_1 auf zwei unter G_0 äquivalente Punkte von ∂F_0 abgebildet werden.
Diese Tatsache erlaubt es uns, w ähnlich wie in Abschnitt 2) dieses Kapitels durch die Festsetzung $w(S(z))=T(w(z))$ mit $T=\Psi^{-1}(S)$ auf ganz $\hat{C}-\Lambda_1=\Omega_1$ ($\hat{C}$-abgeschlossene komplexe Zahlenebene, Λ_1-singuläre Menge von G_1) quasikonform fortzusetzen. Man erkennt nämlich aus schon mehrfach erwähnten Gründen, ähnlich wie in Abschnitt 2), daß sich die maximale Dilatation bei dieser Fortsetzung nicht ändert. Bleiben wir bei der Bezeichnung w für die so fortgesetzte Abbildung, so beweisen wir nun

<u>Lemma II 4</u>
Die Abbildung w ist eineindeutig und stetig auf Λ_1 fortsetzbar.

<u>Beweis:</u> Es sei $z_0 \in \Lambda_1$.
Nach der Voraussetzung über G_1 gibt es eine eindeutig bestimmte Folge von abgeschlossenen Kreisscheiben

$$D_{S_{z_0(1)}} \supset D_{S_{z_0(2)}} \supset \dots \supset D_{S_{z_0(m)}} \supset \dots \qquad \text{mit } \{z_0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} D_{S_{z_0(m)}} .$$

Wir erinnern daran, daß allgemein $D_{S_{(m)}}$ als Kreisscheibe vom Grade m bezeichnet wird und jedem $D_{S_{(m)}}$ eineindeutig eine

Transformation $S_{(m)}=S_{i_m} \dots S_{i_1}$; $S_{i_\nu} \in W_1$ $(\nu=1,\dots,m)$

vom Grade m zugeordnet werden kann.
Die durch die isometrischen Kreise H_S ; $S \in W_1$; berandeten

Kreisscheiben $D_{S(1)}$ sind Kreisscheiben vom Grade 1, $S_{(1)}$ durchläuft alle Elemente aus W_1 (Siehe Kapitel I).
Der isometrische Kreis $H_{S(m)}$ liegt innerhalb der Kreisscheibe $D_{S_{i_1}}$ für $S_{(m)} = S_{i_m} \dots S_{i_1}$.
Durch $S_{(m)}$ wird $\overline{CD}_{S_{i_1}}$ auf $D_{S(m)}$ abgebildet ($\overline{CD}_{S_{i_1}}$ - abgeschlossene Hülle von $CD_{S_{i_1}}$ in $\hat{C}$)
Ist $S_{z_0(m)} = S_{i_m} \dots S_{i_1}$, so wird $\Omega_1 \cap D_{S_{z_0(m)}}$ durch $S^{-1}_{z_0(m)}$ auf $\Omega_1 \cap \overline{CD}_{S_{i_1}}$ abgebildet.
Betrachten wir nun die Folge $T_{z_1(1)}, T_{z_1(2)}, \dots$
mit $T_{z_1(m)} = \Psi^{-1}(S_{z_0(m)})$; $T_{z_1(m)} \in G_0$; so gilt offensichtlich

$D_{T_{z_1(1)}} \supset D_{T_{z_1(2)}} \supset \dots \supset D_{T_{z_1(m)}} \supset \dots$, wobei z_1 durch

$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} D_{T_{z_1(m)}} = \{z_1\}$ bestimmt wird.

Ist $T_{z_1(m)} = T_{i_m} \dots T_{i_1}$ mit $T_{i_\nu} \in W_0$ für $\nu=1,\dots,m$,

so ist nach Voraussetzung $w(\Omega_1 \cap \overline{CD}_{S_{i_1}}) = \Omega_0 \cap \overline{CD}_{T_{i_1}}$,

also $T_{z_1(m)}\, w\, S^{-1}_{z_0(m)}(D_{S_{z_0(m)}} \cap \Omega_1) = D_{T_{z_1(m)}} \cap \Omega_0$

Erweitert man w durch die Festsetzung $w(z_0)=z_1$, so folgt hieraus wegen $T_{z_1(m)}\, w\, S^{-1}_{z_0(m)} = w$ leicht die Stetigkeit von w auf ganz $\hat{C}$. Die Eineindeutigkeit ergibt sich unmittelbar aus der Eindeutigkeit der durch z_0 bzw. z_1 bestimmten Folgen $D_{S_{z_0(1)}} \supset \dots \supset D_{S_{z_0(m)}} \supset \dots$ bzw. $D_{T_{z_1(1)}} \supset \dots \supset D_{T_{z_1(m)}} \supset \dots$

q.e.d.

Die Abbildung w ist somit homöomorph und orientierungserhaltend auf ganz $\hat{C}$, denn es gilt der

Orientierungssatz: *

Es sei B entweder ein ebenes Gebiet oder die abgeschlossene Hülle eines Jordangebietes und w ein Homöomorphismus von B

* Siehe [21] S. 9

auf eine ebene Menge B'. Gibt es ein Jordangebiet D, $\overline{D} \subset B$, derart, daß w die Orientierung des Randes von D erhält, so ist w orientierungserhaltend.

Die Abbildung w ist außerdem quasikonform auf $\hat{C}-\Lambda_1$. Um die Quasikonformität von w auf ganz $\hat{C}$ nachzuweisen, beachten wir, daß alle Grenzpunkte von G_0 auf dem Einheitskreis $|z|=1$ liegen. Die Umkehrabbildung w^{-1} ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von $\hat{C}$ auf $\hat{C}$, der in $\hat{C}-\{z| \ |z|=1\}$ quasikonform ist. Dann ist aus schon mehrfach erwähnten Gründen w^{-1} quasikonform auf ganz $\hat{C}$. Da die Umkehrabbildung einer K-quasikonformen Abbildung wieder K-quasikonform ist, ist auch w quasikonform auf ganz $\hat{C}$.

Wir haben nun die Voraussetzungen geschaffen, um das in Abschnitt 2) durchgeführte Verfahren auf den hier betrachteten Fall zu übertragen.
Ist $\mu=\mu(z)$ ($|\mu| \leq k<1$) die zu w^{-1} gehörende komplexe Dilatation, so betrachten wir alle Funktionen $\mu_t = t\cdot\mu$ für $0 \leq t \leq 1$.
Zu jedem μ_t bestimmen wir mit Hilfe des Existenzsatzes eine quasikonforme Abbildung w_t^{-1} der endlichen Ebene auf sich mit der komplexen Dilatation μ_t, wobei $w_0^{-1} = I$ (I-identische Abbildung) und $w_1^{-1} = w^{-1}$ festgelegt werden.
Aus $Sw^{-1} = w^{-1}T$, $S=\Psi(T)$, $S \in G_1$, $T \in G_0$ folgt, daß μ_t einer Beltrami-Gleichung (39) genügt, was wiederum zur Folge hat, daß $w_t^{-1} G_0 w_t = G_t$ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Transformationen ist.
Es bleibt noch zu zeigen

<u>Lemma II 5</u>
Die Funktion $t \to d(\Lambda_t)$ ist stetig.

<u>Beweis:</u> Wir wählen einen Punkt $z_0 \in \Lambda_0$ und dazu eine Kreisumgebung $U_0 = \{z| \ |z-z_0| < 1\}$.
Durch die Translation $T^*(z)=z-z_0$ bilden wir U_0 auf den

Einheitskreis U ($|z| < 1$) ab. Die Abbildung w_t^{-1} führt U_0 in ein einfach zusammenhängendes Gebiet über, das sich nach dem Riemannschen Abbildungssatz durch eine Abbildung v_t konform auf den Einheitskreis U abbilden läßt.
Die Abbildung $w'_t = v_t w_t^{-1} T^{*-1}$ ist eine quasikonforme Selbstabbildung von U, deren komplexe Dilatation an der Stelle $T^*(z)$ identisch ist mit derjenigen von w_t^{-1} an der Stelle z, wie man unmittelbar einsieht.
w'_t läßt sich auf den Rand von U eineindeutig und stetig fortsetzen und man kann v_t so wählen, daß $w'_t(0)=0$ und $w'_t(1)=1$ gilt.
Nach Satz II 3 ist $d(\Lambda_0)=d(\Lambda_0 \cap U_0)$ und damit $d(T^*(\Lambda_0 \cap U_0))= d(\Lambda_0)$. Wegen $w_t^{-1}(\Lambda_0 \cap U_0) \subset \Lambda_t$ gilt nach dem gleichen Satz $d(w_t^{-1}(\Lambda_0 \cap U_0))= d(\Lambda_t)$.
Hieraus folgt mit $\Lambda_0^* = T^*(\Lambda_0 \cap U_0)$

$d(w'_t(\Lambda_0^*))= d(\Lambda_t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

Aus dem Beweis zu Lemma II 3 folgt nun die Stetigkeit von $t \longrightarrow d(\Lambda_t)$.

q.e.d.

T. Akaza hat ein Beispiel einer Gruppe G_1 vom Ford-Typ ohne parabolische Erzeugende angegeben, deren zugehörige Hausdorff-Dimension nicht unterhalb von $\frac{3}{2}$ liegt ($d(\Lambda_1) \geq \frac{3}{2}$).* Wegen $d(\Lambda_0) \leq 1$ folgt damit unter Berücksichtigung von Satz II 2

<u>Satz II 4</u>

Zu jedem t mit $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ gibt es eine endlich erzeugte eigentlich diskontinuierliche Gruppe G, deren singuläre Menge die Hausdorff-Dimension t hat.

Die obigen Untersuchungen liefern noch eine weitere bemerkenswerte Tatsache. Da G_1 eine quasikonforme Deformation

* Siehe [9]

(quasi-Fuchssche Gruppe) der Fuchsschen Gruppe G_0 ist ($G_1=w^{-1}G_0w$), liegen alle Grenzpunkte von G_1 auf dem Bild des Einheitskreises $|z|=1$ unter w^{-1}, das heißt, auf einer quasikonformen Kurve c. Da es Gruppen G_1 mit $d(\Lambda_1)>1$ gibt, ist damit zugleich gezeigt, daß die Hausdorff-Dimension einer quasikonformen Kurve durchaus größer als 1 sein kann. Ferner zeigt der nachfolgende Satz II 6 , daß in diesem Fall ($d(\Lambda_1)>1$) die quasikonforme Kurve c kein (offenes) analytisches Kurvenstück c_1 (c_1-analytisches Bild des offenen Intervalls (0,1)) enthält, auf dem Grenzpunkte von G_1 liegen.
Wir wollen zunächst das zuerst erwähnte Ergebnis in einem Satz festhalten.

Satz II 5
Jede Gruppe vom Ford-Typ ohne parabolische Erzeugende ist eine quasi-Fuchssche Gruppe.

Ferner gilt

Satz II 6
Es sei G eine quasi-Fuchssche Gruppe mit der singulären Menge Λ, deren Elemente die quasikonforme Kurve c auf sich abbilden ($S(c)=c$ für alle $S \in G$).
Ist die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda)$ größer als 1, so enthält c kein (offenes) analytisches Kurvenstück c_1, auf dem Grenzpunkte von G liegen.

Beweis: Alle Grenzpunkte von G liegen auf c. Ist nun z ein Grenzpunkt von G, der auf dem analytischen Kurvenstück c_1 von c liegt, so kann man eine Umgebung U_z von z finden derart, daß $\Lambda \cap U_z$ nur aus Punkten von c_1 besteht.
Da die Hausdorff-Dimension der Punktmenge c_1 gleich 1 ist, folgt dann mit Hilfe von Satz II 3 $d(\Lambda)\leq 1$, was der Voraussetzung widerspricht.

Kapitel III

1) Einführung

Gegenstand der Untersuchungen in den vorhergehenden Kapiteln I und II waren ausschließlich Funktionsgruppen, das heißt Gruppen G, deren singuläre Menge identisch ist mit der Menge aller Randpunkte einer unter G invarianten zusammenhängenden Komponente Ω^* des Diskontinuitätsbereichs Ω $(S(\Omega^*)=\Omega^*$ für alle $S \in G)$.
Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß nicht jeder Grenzpunkt einer Kleinschen Gruppe G Randpunkt einer zu-

sammenhängenden Komponente des Diskontinuitätsbereichs zu sein braucht. Fassen wir alle Grenzpunkte, die nicht auf dem Rande einer Komponente von Ω liegen, zur residualen Grenzpunktmenge Λ_0 ; $\Lambda_0 \subset \Lambda$; zusammen, so ist, wie man unmittelbar einsieht, Λ_0 leer für die folgenden Fälle:

a) G ist Funktionsgruppe

b) Ω besteht aus genau zwei Komponenten

Im Fall b) ist, wie im folgenden gezeigt wird, der gemeinsame Rand eine quasikonforme Kurve. Wir beweisen in den nachfolgenden Abschnitten, daß die unter a) und b) aufgeführten Gruppen schon alle Ausnahmen sind, genauer: Jede endlich erzeugte Kleinsche Gruppe, die nicht Funktionsgruppe ist und deren Diskontinuitätsbereich aus mehr als zwei Komponenten besteht, besitzt residuale Grenzpunkte ($\Lambda_0 \neq \emptyset$).

Für die Untersuchungen dieses Kapitels benutzen wir die nachfolgenden von L. Ahlfors, L. Bers und B. Maskit bewiesenen Sätze. Wir verweisen dazu auf die unten aufgeführten Arbeiten der betreffenden Autoren.

Satz III 1 *

Ist G eine endlich erzeugte Kleinsche Gruppe mit dem Diskontinuitätsbereich Ω_G , so ist der Quotientenraum Ω_G/G vom endlichen Typ.

Satz III 1 besagt, daß Ω_G/G aus endlich vielen zusammenhängenden Komponenten besteht, wobei jede Komponente eine Riemannsche Fläche ist, die aus einer geschlossenen Riemannschen Fläche durch Herausnahme endlich vieler Punkte gewonnen wird. Übertragen auf Ω_G bedeutet dies: Es gibt nur endlich viele unter G nicht äquivalente (zusammenhängende) Komponenten $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ von Ω_G . ($\Omega_i \subset \Omega_G$, $i=1,\ldots,n$; $S(\Omega_i) \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und alle $S \in G$)
Die Zahl n ist durch G eindeutig bestimmt.

* Siehe [4] und [16]

Mit Hilfe von Satz III 1 folgt unschwer

Satz III 2 *1

Ist G_{Ω_i} $(i=1,2,...,n)$ die Gruppe bestehend aus allen Transformationen S, $S \in G$, mit $S(\Omega_i)=\Omega_i$, so ist G_{Ω_i} wieder eine endlich erzeugte Gruppe und Ω_i ist eine der abzählbar vielen Komponenten von $\Omega_{G_{\Omega_i}}$.

Nach Satz III 2 sind die Randpunkte von Ω_i zugleich Grenzpunkte der Gruppe G_{Ω_i}.

Satz III 3 *2

Enthält der Diskontinuitätsbereich Ω einer endlich erzeugten Kleinschen Gruppe G zwei unter G invariante (zusammenhängende) Komponenten Ω_1, Ω_2 $(\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, $S(\Omega_1)=\Omega_1$, $S(\Omega_2)=\Omega_2$ für alle $S \in G)$, so ist G eine quasi-Fuchssche Gruppe.

Gelten also die Voraussetzungen des Satzes III 3, so bildet die Gesamtheit aller Grenzpunkte von G eine quasikonforme Kurve und es ist $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
Die quasikonformen Kurven sind unter allen Jordankurven dadurch charakterisiert, daß sie von beschränkter Schwenkung sind.
Ein beschränkter Jordanbogen c ist von beschränkter Schwenkung genau dann, wenn es eine positive Zahl h $(h>0)$ gibt derart, daß die Ungleichung

(48) $$|z_1-z_2| \leq h\,|z_3-z_1|.$$

für alle Punkte z_1, z_2, z_3 gilt, die in dieser Reihenfolge auf c liegen. *3
Die nachfolgenden Betrachtungen dieses Abschnitts gehen zurück auf W. Abikoff. *4
Es sei G eine endlich erzeugte Kleinsche Gruppe und Ω_i eine (zusammenhängende) Komponente des Diskontinuitätsbereichs Ω_G von G. Der Rand $\partial\Omega_i$ von Ω_i ist nach Satz III 2

*1 Siehe [5]

*2 Siehe [24]

*3 Siehe [21] S. 107

*4 Siehe [1]

in der singulären Menge $\Lambda_{G_{\Omega_i}}$ der endlich erzeugten Stabilitätsgruppe G_{Ω_i} enthalten.
Ist Ω^* eine weitere von Ω_i verschiedene Komponente von $\Omega_{G_{\Omega_i}}$, so besitzt die Stabilitätsgruppe $G_{\Omega_i\Omega^*}$ ($G_{\Omega_i\Omega^*} \subset G_{\Omega_i}$), bestehend aus allen Elementen $S \in G_{\Omega_i}$ mit $S(\Omega^*) = \Omega^*$ zwei invariante Komponenten, nämlich Ω^* und diejenige Komponente, die Ω_i enthält. Nach Satz III 3 ist $G_{\Omega_i\Omega^*}$ eine quasi-Fuchssche Gruppe. Alle Grenzpunkte von $G_{\Omega_i\Omega^*}$ liegen also auf einer quasikonformen Kurve c_i. Wir wollen nach Abikoff eine derartige Kurve c_i als Separator bezeichnen.

Lemma III 1

Jeder Punkt des Separators c_i ist Randpunkt von Ω_i.

Beweis: Ist $z_i \in \Omega_i$, so ist die Menge der Häufungspunkte von $\{S(z_i) | \; S \in G_{\Omega_i\Omega^*}\}$ mit c_i identisch. Wegen $S \in G_{\Omega_i}$ ist $S(z_i) \in \Omega_i$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Lemma III 2

Die Menge aller Separatoren ist abzählbar.

Beweis: Da G_{Ω_i} endlich viele Erzeugende hat, besteht $\Omega_{G_{\Omega_i}}$ aus abzählbar vielen Komponenten, das bedeutet:
Zu jedem Ω_i kann man nach dem obigen Verfahren abzählbar viele Separatoren gewinnen. Da Ω_G aus abzählbar vielen Komponenten besteht, ist damit auch die Menge aller Separatoren abzählbar.

q.e.d.

Lemma III 3

Zwei Separatoren c_1 und c_2 ($c_1 \neq c_2$) können sich nicht kreuzen.

Die Aussage von Lemma III 3 bedeutet, daß die beiden durch c_1 bestimmten einfach zusammenhängenden Gebiete B_1, B_2 ($\hat{C} = B_1 \cup B_2 \cup c_1$) nicht zugleich Punkte von c_2 enthalten können.

Beweis von Lemma III 3: Es sei c_2 Teil des Randes einer Komponente Ω_2 von Ω_G. Gibt es Punkte z_1, z_2 von c_2 mit $z_1 \in B_1$, $z_2 \in B_2$, so kann man in beliebiger Nähe von z_1 bzw. z_2 Punkte z_1^* bzw. z_2^* mit $z_1^*, z_2^* \in \Omega_2$ finden.
Da Ω_2 zusammenhängend ist, lassen sich z_1^* und z_2^* durch einen Weg s, der ganz in Ω_2 verläuft, verbinden.
s muß dann notwendig c_1 schneiden. Da jeder Punkt von c_1 Grenzpunkt von G ist, s hingegen in Ω_G liegt, ergibt sich hieraus ein Widerspruch.

q.e.d.

Lemma III 4
Es sei $\bigcup_i c_i = \{z \mid z$ ist ein Punkt eines Separators$\}$,
$\bigcup_i c_i \neq \emptyset$ und $\overline{\bigcup_i c_i}$ die abgeschlossene Hülle von $\bigcup_i c_i$.
Dann gilt: $\overline{\bigcup_i c_i} = \Lambda_G$.
(Λ_G-singuläre Menge von G)

Beweis: Man sieht leicht ein, daß jedes Element $S \in G$ einen Separator wieder auf einen Separator abbildet.
Also ist $\bigcup_i c_i$ und damit $\overline{\bigcup_i c_i}$ invariant unter G.
Da $\overline{\bigcup_i c_i}$ abgeschlossen ist und mindestens zwei Punkte enthält, folgt $\overline{\bigcup_i c_i} = \Lambda_G$. *

q.e.d.

2) Die residuale Grenzpunktmenge Λ_0

Nach der Einführung unter 1) beweisen wir zunächst

Lemma III 5
Besteht Ω_G aus genau zwei Komponenten Ω_1, Ω_2, so sind beide Komponenten einfach zusammenhängend und der gemeinsame Rand ist eine quasikonforme Kurve.

* Siehe [20] S. 105

<u>Beweis:</u> Es seien $z_1 \in \Omega_1$, $z_2 \in \Omega_2$. Nach Abschnitt 1) gibt es einen Separator c, der z_1 von z_2 trennt. Durch c werden zwei einfach zusammenhängende Gebiete B_1 und B_2 bestimmt $(\hat{C} = B_1 \cup B_2 \cup c)$.
Nun kann keines dieser Gebiete Grenzpunkte von G enthalten, denn andernfalls kann man mit Hilfe von Lemma I 1 eine Komponente von Ω_G finden, die von Ω_1 und Ω_2 verschieden ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

q.e.d.

Wir wollen im weiteren voraussetzen, daß $\infty \in \Omega_G$ gilt. Dies bedeutet für unsere Betrachtungen keine Einschränkung der Allgemeinheit.
Ist c ein Separator, so wollen wir diejenige Komponente von $\hat{C}-c$, die ∞ nicht enthält, mit B_c, diejenige, die ∞ enthält, mit B_c^* bezeichnen.
Für die weiteren Untersuchungen ist die folgende Definition nützlich.

<u>Definition III 1</u>
Eine Folge $c_1, c_2, \ldots$ von Separatoren konvergiert gegen den endlichen Grenzpunkt z_0 genau dann, wenn $z_0 \in B_{c_i}$ gilt für alle i $(i=1,2,\ldots)$ und es zu jeder Umgebung U_{z_0} von z_0 einen Separator c_i, $c_i \in \{c_1, c_2, \ldots\}$, gibt, der ganz in U_{z_0} verläuft.

Es ist bei dieser Definition zu beachten, daß z_0 auf keinem der Separatoren $c_1, c_2, \ldots$ liegen soll.
Es ist klar, daß jeder derartige Grenzpunkt z_0 in Λ_G liegt und nicht Randpunkt einer Komponente von Ω_G sein kann.
Wir wollen die Gesamtheit aller durch die Definition III 1 bestimmten Grenzpunkte mit Λ_0^* bezeichnen $\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$.
Es sei $\Lambda_1^* = \Lambda_0 - \Lambda_0^*$
Zunächst untersuchen wir nun alle Gruppen G, für die Λ_0^* leer ist.
Dazu beweisen wir

Lemma III 6

Λ_0^* ist genau dann nicht leer, wenn es einen Separator c gibt, derart, daß sowohl B_c als B_c^* Grenzpunkte von G enthalten.

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Ist nämlich Λ_0^* nicht leer, dann gibt es nach Definition III 1 einen Separator c mit der in Lemma III 6 aufgeführten Eigenschaft. Wir nehmen also an, c sei ein Separator, derart, daß sowohl B_c als auch B_c^* Grenzpunkte von G enthalten. Sei $z \in \Lambda_G$, $z \in B_c$. Nach Lemma I 1 kann man zu jeder Kreisumgebung $k_r = \{\zeta \mid |\zeta - z| < r\}$ ein $S \in G$ finden, derart, daß die isometrischen Kreise $H_S, H_{S^{-1}}$ von S bzw. S^{-1} ganz in k_r verlaufen. Das Gebiet $S(B_c^*)$ liegt dann ganz in k_r und wird von dem Separator $S(c)$ berandet. Nach Voraussetzung enthält $S(B_c^*)$ Grenzpunkte von G. Wir können also die obigen Überlegungen für einen Punkt $z_1 \in \Lambda_G$, $z_1 \in S(B_c^*)$ wiederholen. Da das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden kann, läßt sich eine Folge $S_1, S_2, \ldots$ von Elementen $S_n \in G$; $n=1,2,\ldots$; finden, derart, daß die Folge $S_1(c), S_2(c), \ldots$ konvergiert, das heißt Λ_0^* ist nicht leer.

q.e.d.

Nun sind wir in der Lage, eine Aussage zu machen über die Komponenten von Ω_G für den Fall, daß Λ_0^* leer ist.

Satz III 4

Ist Λ_0^* leer, so gilt eine der drei folgenden Möglichkeiten.

a) G ist eine Funktionsgruppe,

b) Ω_G besteht aus genau zwei Komponenten,

c) Ω_G besteht aus abzählbar unendlich vielen einfach zusammenhängenden Komponenten, wobei jede dieser Komponenten von einer quasikonformen Kurve berandet wird.

Ist b) zutreffend, so ist G nach Lemma III 5 entweder eine quasi-Fuchssche Gruppe oder G enthält eine Untergruppe

vom Index 2.

Beweis des Satzes III 4: Gehen wir davon aus, daß die Möglichkeiten a) und b) nicht zutreffen, dann besteht Ω_G aus abzählbar unendlich vielen Komponenten. Die Menge der Separatoren ist dann gewiß nicht leer.

Sei c_0 ein Separator. Nach Lemma III 6 und den Voraussetzungen des Satzes enthält eines der Gebiete $B_{c_0}, B^*_{c_0}$ keine Grenzpunkte von G. Wir können annehmen, daß $B^*_{c_0}$ keinen Grenzpunkt enthält. (Andernfalls betrachten wir eine geeignete zu G konjugierte Gruppe, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.)

Ist nun c ein von c_0 verschiedener Separator, so kann c_0 nicht vollständig auf c liegen, denn B_{c_0} enthält nach Voraussetzung Punkte von c und c ist doppeltpunktfrei.

Es gibt also, da c abgeschlossen ist, einen Punkt von c_0, der in B^*_c liegt. Nach Lemma III 6 enthält also B_c keinen Grenzpunkt von G.

Es seien $c_1, c_2, \ldots$ alle von c_0 verschiedenen Separatoren. Wir betrachten die Menge $M = B_{c_0} - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{c_i}$

Gilt $M \subset \Lambda_G$, so sind wir fertig.

Es bleibt demnach noch zu zeigen, daß unter den eingangs gemachten Voraussetzungen $M \cap \Omega_G = \emptyset$ gilt. Dies schließt man folgendermaßen:

Ist $M \cap \Omega_G \neq \emptyset$ und sind M_1, M_2 zwei verschiedene Komponenten von Ω_G mit $M_1, M_2 \subset M \cap \Omega_G$, z_1, z_2 zwei Punkte mit $z_1 \in M_1$, $z_2 \in M_2$, so gibt es einen Separator c^*, der z_1 von z_2 trennt und damit sicherlich von c_0 verschieden ist.

Ist weiter c_i ein Separator aus $\{c_1, c_2, \ldots\}$, so gilt $z_1, z_2 \in B_{c_0} - B_{c_i}$, das heißt: c_i trennt nicht z_1 von z_2.

Der Separator c^* wäre damit im Widerspruch zur Voraussetzung über $\{c_1, c_2, \ldots\}$ nicht in $\{c_1, c_2, \ldots\}$ enthalten.

$M \cap \Omega_G$ muß also zusammenhängend sein.

Da nach Annahme G keine Funktionsgruppe ist, gibt es ein $S \in G$ mit $S(M \cap \Omega_G) = B_{c_i}$ oder $S(M \cap \Omega_G) = B^*_{c_0}$ für ein

$c_i \in \{c_1, c_2, \ldots\}$. Wegen $M \cap \Omega_G \subset B_{c_0}$ und der Tatsache, daß sich Ω_G aus mehr als zwei Komponenten zusammensetzt, folgt, daß der Rand von $M \cap \Omega_G$ ein von c_0 verschiedener Separator c ist, also $B_c = M \cap \Omega_G$.
Dies jedoch ist ein Widerspruch zur Konstruktion von M.
Damit ist $M \cap \Omega_G = \emptyset$ nachgewiesen. Treffen also die Möglichkeiten a) und b) des Satzes nicht zu, so folgt c)
Der Beweis des Satzes ist damit beendet.

Nachdem wir einen Überblick über alle Gruppen mit $\Lambda_0^* = \emptyset$ gewonnen haben, konzentrieren wir unser Interesse auf den Fall c). Wir zeigen, daß in diesem Fall die Menge $\Lambda_1^* = \Lambda_0 - \Lambda_0^*$ nicht leer ist.
Dazu dient das folgende Lemma.

<u>Lemma III 8</u>
Trifft der Fall c) des Satzes III 4 zu, so gilt:
Sind $z_0 \in B_{c_0}$, $z_0 \in \Lambda_G$ und $k_1 = \{z \mid |z-z_0| < r_1\}$, $k_2 = \{z \mid |z-z_0| < r_2\}$, $k_3 = \{z \mid |z-z_0| < r_3\}$ drei offene konzentrische Kreisscheiben, die vollständig in B_{c_0} liegen mit $r_3 > r_2 > r_1$, , so gibt es nur endlich viele Separatoren aus $\{c_1, c_2, \ldots\}$, die sowohl mit k_1 als auch mit $k_3^* = \{z \mid |z-z_0| > r_3\}$ gemeinsame Punkte haben.

<u>Beweis:</u> Wir setzen zunächst voraus, daß ∞ nicht Fixpunkt einer Transformation $S \in G$ ist, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Wir führen nun den Beweis indirekt. Wir gehen von der Annahme aus, daß unendlich viele Separatoren $c_1^*, c_2^*, \ldots$ zugleich k_1 und k_3^* treffen.
Da die Maximalzahl der unter G nicht äquivalenten Komponenten von Ω_G nach Satz III 1 endlich ist, kann man eine Komponente $\Omega_0 \subset \Omega_G$ und eine Teilfolge $c_{i_1}^*, c_{i_2}^*, \ldots$ von $c_1^*, c_2^*, \ldots$ finden derart, daß alle Komponenten $B_{c_{i_1}^*}, B_{c_{i_2}^*}, \ldots$ zu Ω_0 äquivalent sind.
Ist c_0^* die Randkurve von Ω_0, so gibt es also eine Folge

$S_1, S_2, \ldots$ mit $S_j \in G$, $S_j(\infty) \neq \infty$ und $S_j(c^*_{ij}) = c^*_0$, $S_j(B_{c^*_{ij}}) = \Omega_0$ für $j=1,2,\ldots$.

Ist H_{S_j} der isometrische Kreis von S_j $(j=1,2,\ldots)$ mit dem Radius R_{S_j} , so gilt $\lim_{j\to\infty} R_{S_j} = 0$.*

Da der Durchmesser aller c^*_{ij} $(j=1,2,\ldots)$ oberhalb einer von j unabhängigen positiven Zahl liegt, dürfen wir von vornherein über $\{c^*_{i_1}, c^*_{i_2}, \ldots\}$ voraussetzen, daß es für jedes $j \in \{1,2,\ldots\}$ Punkte auf c^*_{ij} gibt, die außerhalb D_{S_j} liegen (D_{S_j} - die von H_{S_j} berandete abgeschlossene endliche Kreisscheibe). Jeder Separator $c^*_{ij} \in \{c^*_{i_1}, c^*_{i_2}, \ldots\}$ enthält nach Voraussetzung Punkte z_{ij} und z'_{ij} mit $z_{ij} \in k^*_3$, $z'_{ij} \in k_1$. Ist nun $z'_{ij} \notin D_{S_j}$, so gibt es eine Umgebung $U_{z'_{ij}} \subset k_1$ von z'_{ij} mit $U_{z'_{ij}} \cap D_{S_j} = \emptyset$. Nach Lemma I 1 und Satz III 2 kann man eine Transformation $S \in G$ finden mit $S(B_{c^*_{ij}}) = B_{c^*_{ij}}$ derart, daß die isometrischen Kreise $H_S, H_{S^{-1}}$ beide in $U_{z'_{ij}}$ liegen. Die Transformation S_jS bildet dann c^*_{ij} auf c^*_0 ab und der isometrische Kreis von S_jS liegt nach Voraussetzung in $U_{z'_{ij}}$. Ist $z \neq z'_{ij}$ ein Punkt auf c^*_{ij} mit $z \notin D_{S_j}$, so kann man nach der gleichen Überlegung ein $S \in G$ mit $S(B_{c^*_{ij}}) = B_{c^*_{ij}}$ finden derart, daß die isometrischen Kreise von S und S^{-1} in einer hinreichend kleinen Umgebung von z, die z'_{ij} nicht enthält, liegen. Man darf also nach den obigen Überlegungen voraussetzen, daß die isometrischen Kreise H_{S_j} $(j=1,2,\ldots)$ jeweils in einer Umgebung $U_{z'_{ij}}$ von z'_{ij} mit $U_{z'_{ij}} \subset k_1$ liegen. Wir verbinden nun z_{ij} und z'_{ij} durch einen mit Ausnahme seiner Endpunkte ganz in $B_{c^*_{ij}}$ verlaufenden Weg w_{ij} . Die Schnittmenge $k_{r_2} \cap B_{c^*_{ij}}$ $(k_{r_2} = \{z \mid |z-z_0| = r_2\})$ besteht aus abzählbar vielen offenen paarweise punktfremden Kreisbögen (Jeder Kreisbogen enthält einen Punkt $z = z_0 + r_2 e^{i\varphi}$ mit rationalem φ) und wir können voraussetzen, daß jeder dieser Kreisbögen von w_{ij} höchstens einmal geschnitten wird. Ist a_j von z_{ij} ausgehend der erste Schnittpunkt von w_{ij} mit k_{r_2} , so gehen wir von a_j aus in beide entgegengesetzte Richtungen auf k_{r_2} jeweils so weit, bis wir zum erstenmal auf Punkte e^1_j, e^2_j von c^*_{ij} stoßen. Wir orientieren k_{r_2} so, daß

* Siehe [19]

im Sinne dieser Orientierung das Innere von k_2 jeweils zur Linken liegt. Weiter numerieren wir die obigen Punkte e_j^1, e_j^2 derart, daß der orientierte Kreisbogen b_{ij} auf k_{r_2} mit dem Anfangspunkt e_j^1 und dem Endpunkt e_j^2 mit Ausnahme von e_j^1 und e_j^2 ganz in $B_{c_{ij}^*}$ verläuft.
Die Punkte e_j^1 und e_j^2 zerlegen c_{ij}^* in zwei Teilbögen $\widehat{e_j^2 z'_{ij} e_j^1}$, $\widehat{e_j^1 z_{ij} e_j^2}$, wobei z_{ij} und z'_{ij} auf verschiedenen Teilbögen liegen. Ist c_{ij}^* so orientiert, daß beim Durchlaufen von c_{ij}^* im Sinne der Orientierung $B_{c_{ij}^*}$ zur Linken liegt, so folgen e_j^1, z_{ij} und e_j^2 im Sinne der Orientierung aufeinander. Die Bögen b_{ij} $(j=1,2,\ldots)$ sind natürlich paarweise punktfremd. Wir können nach den obigen Überlegungen S_j so wählen, daß D_{S_j} keine Punkte des Bogens $\widehat{e_j^1 z_{ij} e_j^2}$ auf c_{ij}^* enthält. Außerdem darf man voraussetzen, daß das Bild von $\widehat{e_j^1 z_{ij} e_j^2}$ unter S_j auf einem vorgegebenen Jordanbogen b_o^* von c_o^* liegt ($b_o^* \neq c_o^*$), denn mit Hilfe von Lemma I 1 kann man ähnlich wie oben erreichen, daß der Durchschnitt von $D_{S_j^{-1}}$ mit c_o^* nur aus Punkten von b_o^* besteht.
Orientieren wir c_o^* so, daß beim Durchlaufen von c_o^* Ω_o zur Linken liegt, so folgen $S_j(e_j^1)$, $S_j(z_{ij})$ und $S_j(e_j^2)$ auf c_o^* im Sinne dieser Orientierung aufeinander.

Mit $\quad S_j(z) = \dfrac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}$, $\quad \alpha_j\delta_j - \beta_j\gamma_j = 1$, $\gamma_j \neq 0$ $\quad (j=1,2,\ldots)$

folgt:

$$(49) \qquad \left|S_j(e_j^1) - S_j(e_j^2)\right| \leq \int\limits_{b_{ij}} \frac{1}{|\gamma_j|^2} \, \frac{1}{\left|z + \frac{\delta_j}{\gamma_j}\right|^2} \, |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\gamma_j|^2} \, \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \, L(b_{ij})$$

($L(b_{ij})$- Länge des Bogens b_{ij}), da der Mittelpunkt $-\dfrac{\delta_j}{\gamma_j}$

des isometrischen Kreises H_{S_j} nach Konstruktion in k_1 liegt. Weiter gilt:

$$(50)\quad \left|S_j(e_j^1)-S_j(z_{ij})\right| = \left|\frac{\alpha_j e_j^1+\beta_j}{\gamma_j e_j^1+\delta_j} - \frac{\alpha_j z_{ij}+\beta_j}{\gamma_j z_{ij}+\delta_j}\right| =$$

$$= \frac{\left|e_j^1 - z_{ij}\right|}{\left|\gamma_j\right|^2 \cdot \left|e_j^1+\frac{\delta_j}{\gamma_j}\right| \cdot \left|z_{ij}+\frac{\delta_j}{\gamma_j}\right|} \geq \frac{r_3-r_2}{\left|\gamma_j\right|^2 (r_2+r_1)\, d_{c_0}} =$$

$$= K_0 \frac{1}{\left|\gamma_j\right|^2} \qquad (K_0 > 0)$$

$$d_{c_0} = \sup \left\{ |z_1-z_2| \,\middle|\, z_1, z_2 \text{ Punkte von } c_0 \right\}$$

Die obige Ungleichung ergibt sich wegen $-\frac{\delta_j}{\gamma_j} \in k_1$.

Aus (49) und (50) folgt:

$$\frac{\left|S_j(e_j^1)-S_j(e_j^2)\right|}{\left|S_j(e_j^1)-S_j(z_{ij})\right|} \leq \frac{L(b_{ij})}{(r_2-r_1)^2 K_0} = K_1\, L(b_{ij})$$

Wegen $\lim_{j\to\infty} L(b_{ij})=0$ kann es also keine nur von b_0^* abhängige Konstante $h>0$ geben, die der Ungleichung (48) genügt. b_0^* wäre demnach nicht von beschränkter Schwenkung. Das jedoch ist ein Widerspruch zu der Tatsache, daß b_0^* ein beschränkter quasikonformer Jordanbogen ist.

Damit ist Lemma III 8 bewiesen.

Wir sind nun in der Lage, das angestrebte Resultat herzuleiten.

Satz III 5

Es sei G eine endlich erzeugte Kleinsche Gruppe mit $\Lambda_0^* = \emptyset$. Besteht Ω_G aus mehr als zwei (zusammenhängenden) Kompo-

nenten und ist G keine Funktionsgruppe, so ist Λ_1^* nicht leer.

Beweis: Wir dürfen voraussetzen, daß $\infty \in \Omega_G$ und $S(\infty) \neq \infty$ für alle $S \in G$ gilt. Die im weiteren benutzten Bezeichnungen haben sinngemäß die gleiche Bedeutung wie in den Beweisen zu Satz III 4 und Lemma III 8 .

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: Wir nehmen an, daß jeder von c_0 verschiedene Separator $c_i \in \{c_1, c_2, \ldots\}$ höchstens einen Punkt mit c_0 gemeinsam hat.

Wir wählen einen Grenzpunkt z_0 von G mit $z_0 \in B_{c_0}$ und dazu einen Kreis $k_{z_0} = \{z \mid |z-z_0| < r_{z_0}\}$, der kompakt in B_{c_0} liegt. Nach Lemma III 8 gibt es höchstens endlich viele Separatoren, die k_{z_0} treffen und einen Punkt mit c_0 gemeinsam haben. Es seien $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ diejenigen Separatoren, die gemeinsame Punkte mit k_{z_0} besitzen. Ist $c_{k_j} \in \{c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots\}$, so sei $c_{k_j}^*$ die Menge aller Punkte von c_{k_j} , die in $k_{z_0}^* = \{z \mid |z-z_0| \geq r_{z_0}\}$ liegen.

Wir betrachten nun die abgeschlossene Menge $E = \overline{\bigcup_j c_{k_j}^* \cup k_\Lambda}$, wobei k_Λ die Menge aller auf k_{z_0} liegenden Grenzpunkte von G ist und der Querstrich andeuten soll, daß E aus $\bigcup_j c_{k_j}^* \cup k_\Lambda$ durch Hinzunahme aller Häufungspunkte dieser Menge entsteht. Die Menge E enthält nur endlich viele Punkte von c_0, denn ist $p_1, p_2, \ldots$ eine Punktfolge aus $\bigcup_j c_{k_j}^*$, die gegen einen Punkt p_0 von c_0 konvergiert, so gibt es nach Lemma III 8 eine Teilfolge von $p_1, p_2, \ldots.$ deren Glieder sämtlich auf einem Separator $c_{k_{j_0}} \in \{c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots.\}$ liegen. Da $c_{k_{j_0}}$ abgeschlossen ist und nur endlich viele Separatoren aus $\{c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots\}$ nach Voraussetzung höchstens einen Punkt mit c_0 gemeinsam haben, enthält auch E nur endlich viele Punkte von c_0. Es gibt

also mindestens einen Punkt von c_0, der nicht in E liegt. Es sei nun C_1 die (zusammenhängende) Komponente von $\hat{C}-E$, die den Punkt ∞ enthält und C_2 diejenige mit dem Punkt z_0 ($z_0 \in C_2$). E trennt C_1 von C_2, denn ist w ein Weg, der den Punkt ∞ mit z_0 verbindet, so durchlaufen wir w von ∞ aus so weit, bis wir zum erstenmal auf einen Punkt z_w von k_{z_0} stoßen. Ist $z_w \in \Omega_G$, so gibt es einen Separator c mit $z_w \in B_c$. Nach Konstruktion ist k_{z_0} nicht in B_c enthalten. Der Separator c muß also mit k_{z_0} gemeinsame Punkte besitzen, $c \in \{c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots\}$. Hieraus erkennt man, daß beim Durchlaufen des Weges w die Menge E getroffen wird. Ist hingegen $z_w \in k_\Lambda$, so hat w ebenfalls gemeinsame Punkte mit E.

Wir haben damit folgenden Tatbestand:

Jede der Komponenten C_1 und C_2 enthält Grenzpunkte von G und beide Komponenten werden durch die Grenzpunktmenge $E \subset \Lambda_G$ voneinander getrennt.

Nach Lemma I 1 kann man ein $A_1 \in G$ finden, derart, daß $D_{A_1}, D_{A_1^{-1}}$ ganz in C_2 liegen.

Dann gilt: $A_1(C_1) \subset D_{A_1^{-1}} \subset C_2$, $A_1(E) \subset D_{A_1^{-1}} \subset C_2$ und $A_1(C_1)$ wird von C_1 durch $A_1(E) \subset \Lambda_G$ getrennt. Da $A_1(C_1)$ wieder Grenzpunkte von G enthält, läßt sich ein $A_2 \in G$ bestimmen mit $D_{A_2}, D_{A_2^{-1}} \subset A_1(C_1)$, $A_2(C_1) \subset A_1(C_1)$, $A_2(E) \subset A_1(C_1)$.

So fortfahrend erhält man eine Folge

$A_1, A_2, \ldots$ mit $A_j \in G$, $A_{j+1}(E) \subset A_j(C_1)$ für $j=1,2,\ldots$

Ist nun $\{z_A\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j(C_1)$, so ist z_A wegen der Abgeschlossenheit von Λ_G sicherlich in Λ_G enthalten. Ferner kann aufgrund obiger Konstruktion z_A nicht Randpunkt einer Komponente von Ω_G sein (Siehe Beweis zu Lemma III 6).

2.Fall: Wir nehmen an, daß es einen von c_0 verschiedenen Separator $c_i \in \{c_1, c_2, \ldots\}$ gibt, der mindestens zwei Punkte mit c_0 gemeinsam hat.

Sei z ein Punkt von c_0, der nicht auf c_i liegt.

Wir gehen von z aus auf c_0 in beide Richtungen so weit,

bis wir zum erstenmal auf Punkte e_1, e_2 von c_i stoßen. Nach Voraussetzung müssen e_1 und e_2 verschieden sein. Die beiden Punkte e_1, e_2 zerlegen c_i in zwei Teilbögen b_{i_1}, b_{i_2}. Ist nun z_1 ein Punkt aus B_{c_i}, so verbinden wir z_1 und z durch einen Weg s, der e_1 und e_2 nicht trifft und mit Ausnahme von z ganz in B_{c_0} verläuft. Gehen wir von z aus längs s, so erreichen wir einen ersten Punkt z_1' von c_i. z_1' liegt auf einem Teilbogen, den wir mit b_{i_1} bezeichnen. Der Teilbogen b_{i_2} kann nicht vollständig auf c_0 liegen, denn andernfalls gibt es einen Punkt z_2 auf c_0 und eine Umgebung U_{z_2} von z_2, deren Durchschnitt mit Λ_6 nur aus Punkten von c_0 besteht. Mit Hilfe von Lemma I 1 kann man dann schließen (da b_{i_1} Punkte aus B_{c_0} enthält), daß U_{z_2} einen Separator enthält. c_0 wäre damit nicht doppelpunktfrei.

Es gibt mithin auf b_{i_2} einen Punkt z_0 mit $z_0 \in B_{c_0}$ $(z_0 \neq e_1, e_2)$. Da b_{i_1} zusammen mit den Endpunkten abgeschlossen ist, gibt es eine Kreisumgebung $k_{z_0} = \{z \mid |z-z_0| < r_1\}$, die vollständig in B_{c_0} liegt und keine gemeinsamen Punkte mit b_{i_1} hat. Wir betrachten nun wie im ersten Fall die Menge $E = \overline{\bigcup_j c^*_{k_j} \cup k_\Lambda}$. Dann muß der Punkt z in der durch E bestimmten Komponente C_1 ($\infty \in C_1$; Siehe Fall 1.) liegen, denn andernfalls gibt es in einer hinreichend kleinen Umgebung von z, die vollständig in $B^*_{c_i}$ ($\infty \in B^*_{c_i}$) liegt, Punkte eines von c_i verschiedenen Separators c, der gemeinsame Punkte mit k_{z_0} hat. Da c $B^*_{c_0}$ nicht schneidet, muß nach Wahl von z_0 der Separator c den Separator c_i kreuzen, was im Widerspruch zu Lemma III 3 steht.

Die durch E bestimmten Komponenten C_1 ($\infty \in C_1$) und C_2 ($z_0 \in C_2$) enthalten demnach beide Grenzpunkte von G.

Ebenso wie im Fall 1 folgt, daß Λ^*_1 nicht leer ist.

q.e.d.

Aus den Sätzen III 4 und III 5 folgt nun das anfangs erwähnte Resultat.

Satz III 6

Die residuale Grenzpunktmenge Λ_0 einer endlich erzeugten Kleinschen Gruppe G ist genau dann leer, wenn G eine Funktionsgruppe ist oder der Diskontinuitätsbereich Ω_G aus genau zwei Komponenten besteht.
Im letzten Fall ist der gemeinsame Rand beider Komponenten eine quasikonforme Kurve, die Gruppe G entweder eine quasi-Fuchssche Gruppe oder es gibt eine Untergruppe in G vom Index 2.

Wir haben im Beweis zu Satz III 5 residuale Grenzpunkte finden können mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung eines derartigen Grenzpunktes z eine abgeschlossene Grenzpunktmenge E (Siehe Beweis zu Satz III 5) mit $z \notin E$ enthält, die z von ∞ trennt.
Umgekehrt läßt sich unter den Voraussetzungen des Satzes III 5 mit Hilfe von Lemma III 8 leicht nachweisen, daß es zu jedem Grenzpunkt z von G, der nicht Punkt eines Separators ist (das heißt nicht Randpunkt einer Komponente von Ω_G), eine abgeschlossene Grenzpunktmenge E mit $z \notin E$ gibt, die ganz in einer vorgegebenen Umgebung von z liegt und z von ∞ trennt.

Mit Hilfe von Satz III 6 folgt

Satz III 7

Ist die residuale Grenzpunktmenge einer endlich erzeugten Kleinschen Gruppe G, die nicht Funktionsgruppe ist, leer, so hat die singuläre Menge Λ_G von G das Flächenmaß 0.

Beweis: Nach Satz III 6 liegen alle Grenzpunkte von G auf einer quasikonformen Kurve c. Da c quasikonform ist, gibt es eine Umgebung U_1 des Einheitskreises $|z| = 1$ und eine quasikonforme Abbildung h, die U_1 auf eine Umgebung

von c abbildet derart, daß das Bild des Einheitskreises $|z|=1$ die Kurve c ist. Da weiter jede quasikonforme Abbildung Nullmengen wieder auf Nullmengen abbildet,* ist das Flächenmaß von c gleich 0.

q.e.d.

Aus den Sätzen III 7 und III 4 ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage:

" Ist die Grenzpunktmenge Λ_0^* einer endlich erzeugten Kleinschen Gruppe G, die nicht Funktionsgruppe ist, leer und hat die singuläre Menge Λ_G ein positives Flächenmaß, so ist die residuale Grenzpunktmenge Λ_0 nicht leer und das Flächenmaß von Λ_0 ist ebenfalls positiv".

3) Die Hausdorff-Dimension der residualen Grenzpunktmenge

Ist Λ_0^* nicht leer, so enthält Λ_0^* unendlich viele Elemente, was man mit Hilfe von Lemma I 1 sofort einsieht.
Setzen wir zunächst $\Lambda_0^* \neq \emptyset$ voraus, so kann man also vier paarweise punktfremde Separatoren c_1, c_2, c_3, c_4 finden, derart, daß jedes Gebiet B_{c_i} $(i=1,..,4; \infty \notin B_{c_i})$ Grenzpunkte von G enthält und außerdem $B_{c_i} \cap B_{c_j} = \emptyset$ für $j \neq i$ $j,i \in \{1,2,3,4\}$ gilt. Mit Hilfe von Lemma I 1 bestimmen wir zwei Transformationen $S_1, S_2 \in G$ mit folgenden Eigenschaften: Die isometrischen Kreise $H_{S_1}, H_{S_1^{-1}}$ liegen in B_{c_1} bzw. B_{c_2}, die isometrischen Kreise $H_{S_2}, H_{S_2^{-1}}$ in B_{c_3} bzw. B_{c_4}.

S_1, S_2 erzeugen eine Untergruppe U_G von G und man erkennt mit Hilfe des Kapitels I unmittelbar, daß alle Grenzpunkte von U_G in Λ_0^* liegen ($\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$; Λ_0 -residuale Grenzpunktmenge von G). Nach Satz I 7 ist die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_0^*)$ positiv.
Ist $\Lambda_0^* = \emptyset$, so kann man nach dem Beweis zu Satz III 5 statt der Separatoren $c_1, \dots, c_4$ entsprechende paarweise punktfremde abgeschlossene Grenzpunktmengen E_1, E_2, E_3, E_4 finden.

* Siehe [21] S. 174

(Die Mengen E_i ;i=1,2,3,4; entsprechen den im Beweis zu Satz III 5 konstruierten Mengen E oder sind Bilder S(E) $S \in G$ derartiger Mengen E)
Wieder kann man ähnlich wie oben schließen, daß $d(\Lambda_1^*)$ positiv ist. Es gilt daher

Satz III 8
Ist Λ_0 nicht leer, so ist die Hausdorff-Dimension $d(\Lambda_0)$ von Λ_0 positiv.

Enthält die endlich erzeugte Kleinsche Gruppe G ein parabolisches Element S_p mit dem Fixpunkt p_0, so wählen wir eine Transformation A mit $A(p_0)=\infty$ derart, daß $T(z)=AS_pA^{-1}(z)=z+\lambda$ $(T=AS_pA^{-1})$ mit reellem λ gilt. Ist nun Λ_0^* nicht leer, so können wir zwei in der endlichen Ebene verlaufende Separatoren c_1,c_2 finden, derart, daß sowohl B_{c_1} als auch B_{c_2} innerhalb eines zur reellen Achse senkrecht verlaufenden Parallelstreifens der Breite $|\lambda|$ liegen. Nach Lemma I 1 kann man ein $S \in G$ finden, sodaß $H_S,H_{S^{-1}}$ vollständig in B_{c_1} bzw. B_{c_2} enthalten sind.
Verfolgt man den Beweis zu Satz I 8, so erkennt man sofort, daß die residuale Grenzpunktmenge der Gruppe $G_A=AGA^{-1}$ eine Teilmenge enthält, deren Hausdorff-Dimension größer als $\frac{1}{2}$ ist. Dann ist auch $d(\Lambda_0^*)>\frac{1}{2}$.
Gilt $\Lambda_0^*=\emptyset$, $\Lambda_0\neq\emptyset$, so kann man ebenso schließen, wenn man c_1,c_2 durch zwei entsprechende abgeschlossene Grenzpunktmengen E_1,E_2 (Siehe Beweis zu Satz III 5) ersetzt.
Es folgt dann $d(\Lambda_1^*)>\frac{1}{2}$.

Damit gilt:

Satz III 9
Enthält die endlich erzeugte Kleinsche Gruppe G ein parabolisches Element und ist Λ_0 nicht leer, so gilt $d(\Lambda_0)>\frac{1}{2}$.

Durch ähnliche Überlegungen gewinnt man mit Hilfe des Beweises zu Satz I 9 unmittelbar

Satz III 10

Enthält die endlich erzeugte Kleinsche Gruppe G eine doppeltperiodische Untergruppe und ist Λ_0 nicht leer, so gilt $d(\Lambda_0) > 1$.

Wir wollen nun abschließend noch zeigen, daß Λ_1^* parabolische Fixpunkte enthalten kann, Λ_0^* jedoch nicht.

Satz III 11

Λ_0^* enthält keine parabolischen Fixpunkte

Beweis: Ist $p_0 \in \Lambda_0^*$ Fixpunkt eines parabolischen Elements $S_{p_0} \in G$, so wählen wir eine Transformation A mit $A(p_0) = \infty$ derart, daß $T(z) = AS_{p_0}A^{-1}(z) = z + \lambda$ mit reellem λ gilt ($T = AS_{p_0}A^{-1}$). Nach Voraussetzung über p_0 gibt es dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Separator c_n, der vollständig in $\{z|\ |z| \geq n\}$ verläuft mit $\{z|\ |z| \geq n\} \supset B^*_{c_n}$.

Ist nun $n > |\lambda|$, so kann man offenbar ein $l \in \mathbb{Z}$ finden, derart, daß die Separatoren $T^l(c_n)$ und c_n sich kreuzen. Das jedoch widerspricht dem Lemma III 3.

q.e.d.

Das nachfolgende Beispiel zeigt, daß Λ_1^* parabolische Fixpunkte enthalten kann.

Wir gehen von zwei Kreisen $k_1 = \{z|\ |z - z_{m_1}| = r_1\}$, $k_2 = \{z|\ |z - z_{m_2}| = r_2\}$ aus, die sich senkrecht in den Punkten z_1, z_2 schneiden. Zu jedem der Kreise k_i $(i=1,2)$ bestimmen wir endlich viele Orthokreise $k_1^{(i)}, \dots k_{n_i}^{(i)}$ $(i=1,2)$ derart, daß jeder Orthokreis aus $\{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$ genau zwei (benachbarte) Kreise aus $\{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$ von außen berührt.
Wir können die Kreise so wählen, daß außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Punkte z_1, z_2 sind jeweils Berührpunkte je zweier Kreise aus $\{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$ für jedes $i \in \{1,2\}$ mit gleichem Radius, wobei kein Kreis durch z_1 und z_2 gleichzeitig verläuft.

b) Sind D_1, D_2 zwei abgeschlossene endliche Kreisscheiben derart, daß D_1 durch einen Kreis aus $\{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_1}^{(1)}\}$, D_2 hingegen durch einen Kreis aus $\{k_1^{(2)}, \dots, k_n^{(2)}\}$ berandet wird, so hat D_1 genau dann Punkte mit D_2 gemeinsam, wenn beide Kreisscheiben zugleich den Punkt z_1 oder zugleich den Punkt z_2 enthalten.

Mit Hilfe der Kreise $k_1^{(i)}, \dots, k_n^{(i)}$ lassen sich für jedes i Erzeugende einer Fuchsschen Gruppe U_i definieren, deren Elemente die Menge $\{z \mid |z-z_{m_i}| \leq r_i\}$ wieder auf sich abbildet. (Die Kreise $k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}$ sind die isometrischen Kreise der Erzeugenden und ihrer Inversen.)
Durch die beiden Kreise aus $\{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$, die sich jeweils in z_j $(j=1,2)$ berühren, soll dabei eine parabolische Transformation mit dem Fixpunkt z_j bestimmt werden.
Jede Gruppe U_i $(i=1,2)$ ist eine Fuchssche Gruppe erster Art. Die Grenzpunktmenge ist mit k_i $(i=1,2)$ identisch.
Die Erzeugenden der Gruppen U_1 und U_2 sind zusammen Erzeugende einer Gruppe G. Jeder Punkt z_j $(j=1,2)$ ist gemeinsamer Punkt von vier isometrischen Kreisen aus $\bigcup_{i=1}^{2} \{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$, deren zugehörige Transformationen eine doppelt-periodische Untergruppe von G erzeugen.
Durchläuft D_j die endlich vielen durch die Kreise aus $\bigcup_{i=1}^{2} \{k_1^{(i)}, \dots, k_{n_i}^{(i)}\}$ berandeten abgeschlossenen endlichen Kreisscheiben, so liegt der isometrische Kreis eines jeden Elements aus G in $\bigcup_j D_j$ (Siehe Kapitel I Abschnitt 2)).

G ist also eine Kleinsche Gruppe.
Bildet man durch eine Transformation A den Punkt z_1 auf ∞ ab, so erkennt man sofort, daß ∞ nicht Randpunkt einer Komponente aus $\Omega_{AGA^{-1}}$ sein kann. Hieraus folgt, daß die Punkte z_1, z_2 in Λ_1^* liegen.

Literatur

William Abikoff:

[1] The residual limit sets of Kleinian groups
Acta mathematica 130 (1973)

R.D.M. Accola:

[2] Invariant domains of Kleinian groups
American J. Math. 88 (1966)

L. V. Ahlfors:

[3] On quasikonformal mappings
J. Analyse Math. 4 (1954)

[4] Finitely generated Kleinian groups
American J. Math. 86 (1964)

[5] Structure of finitely generated Kleinian groups
Acta mathematica 122 (1969)

T. Akaza:

[6] Poincare theta-series and singular sets of Schottky-groups
Nagoya Math. J. 24 (1964)

[7] Singular sets of some Kleinian groups
Nagoya Math. J. 26 (1966)

[8] Singular sets of some Kleinian groups II
Nagoya Math. J. 29 (1967)

[9] $\frac{3}{2}$- dimensional measure of singular sets of some Kleinian groups
Journal Math. Soc. Japan 24 (1972)

[10] Local property of the singular sets of some
Kleinian groups
Tohoku Math. J. 25 (1973)

T. Akaza and Toshio Shimazaki:

[11] The Hausdorff-Dimension of the singular sets of
combination groups
Tohoku Math. J. 25 (1973)

A.F. Beardon:

[12] On the Hausdorff-dimension of general Cantor sets
Procceedings of the Cambridge Philosophical
Society 61 (1965)

[13] The Hausdorff-dimension of singular set of properly
discontinuous groups
Amer. J. Math. 88 (1966)

[14] The exponent of convergence of Poincare-series
Proc. London Math. Soc. 18 (1968)

[15] Inequalities for certain Fuchsian groups
Acta mathematica 127 (1971)

L. Bers:

[16] On Ahlfors finiteness theorem
Amer. J. Math. 89 (1967)

[17] On boundaries of Teichmüller spaces and on
Kleinian groups I
Ann of Math. 91 (1970)

H. Behnke, F. Sommer:

[18] Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen
Veränderlichen
Springer-Verlag (1962)

L.R. Ford:

[19] Automorphic functions
2 nd Ed. Chelsea, New York (1951)

J. Lehner:

[20] Discontinuous groups and automorphic functions
Math. Survey 7, Amer. Math. Soc. Rhode Island (1964

O. Letho und K.I. Virtanen:

[21] Quasikonforme Abbildungen
Springer-Verlag Berlin (1965)

B. Maskit:

[22] On Kleins combination theorem
Transactions, American Mathematical Society 120 (1965)

[23] On Kleins combination theorem II
Transactions, Amer. Math. Soc. 131 (1968)

[24] On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II
Annals of Mathematics 91 (1970)

O. Teichmüller:

[25] Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen
Preuss. Acad. Math.-naturw. Kl 4 (1943)

Lebenslauf

Am 27. Dezember 1941 wurde ich als Sohn der Eheleute Heinrich Wolking und Anna geborene Bernholt in Damme (i. Oldb.) geboren.
Nach dem Besuch der Volksschule und der Mittelschule in Damme erfolgte Ostern 1957 die Aufnahme in die gymnasiale Oberstufe am Gymnasium Antonianum in Vechta (i. Oldb.). Dort legte ich am 1. März 1961 mit Erfolg die Reifeprüfung ab. Im Sommer 1961 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Münster, das ich am 9. November 1967 mit der ersten philologischen Staatsprüfung erfolgreich abschloß. Anschließend trat ich in den Schuldienst. Nach der Ausbildung als Studienreferendar in Minden (i. W.) und Bielefeld folgte mit Wirkung vom 1. November 1969 die Ernennung zum Studienassessor am Gymnasium in Damme. Vom 1. November 1972 an bin ich Studienrat am Gymnasium Damme.

Walter Wolking